

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22500258

研究課題名(和文) 確率過程に対する統計的漸近理論と損害保険数理への応用

研究課題名(英文) Statistical Asymptotic Theory for Stochastic Processes and Its Application to Actuarial Science

研究代表者

阪本 雄二 (Sakamoto, Yuji)

神戸大学・人間発達環境学研究所・准教授

研究者番号：70215664

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：離散観測に拡散モデルの推測問題に関しては、観測間隔が一定で観測時間が長い場合については、時系列解析における推定量の漸近展開と同様の展開が得られた。ジャンプを持つ拡散過程については、エルゴード的である場合とノイズが小さい場合の最尤推定量の漸近正規性を証明が強い条件の下でできた。クレーム総額のモデルを複合ポアソン過程から飛躍付拡散過程に一般化し、倒産確率の漸近展開を形式的に求めた。顧客のリスクファクターとして有効な指標を定式化するための多重決定法を提案し、その方法は観測値の分布が連続なときはFDRを小さく保つことを証明し、離散的なときは数値実験により検証した。

研究成果の概要(英文)：We considered the estimating problem based on observations for the diffusion models. In the case where the intervals of observations are fixed small, the asymptotic expansions for estimators are obtained and they have similar form to that for time series analysis. As for the diffusion processes with jumps, the asymptotic normalities for the maximum likelihood estimators are proved under some strong conditions with ergodicity or small noise property. We proposed the multiple testing procedure to detect the customers risk factor indices, proved that it keeps false discovery rate in the continuous observation case, and show with numerical experiments that it also controls the FDR for discrete observations.

研究分野：数理統計学

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：統計的漸近理論 確率過程 保険数理 多重検定

## 1. 研究開始当初の背景

連続時間径数を持つ確率過程の中で広く応用されているものは、空間ポアソン過程と拡散過程であるが、前者の高次漸近理論を含む統計的推測理論は、Kutoyants(1998)などの結果より、一般論が完成したと言っても良い状況にある。拡散過程については、Prakasa Rao(1999)などが連続観測および離散観測の推定問題に対する1次の漸近理論を与え、Yoshida (1992), Sakamoto-Yoshida(1998), Sakamoto(2000)などが連続観測の推定・検定問題に対する高次漸近理論を発展させた。

しかしながら、実際に観測されるデータが離散的であることから、これまでの連続観測に対する結果を応用する際、サンプリング精度と観測時間の長さ・拡散の大きさの関係が問題となる。また、音声認識やゲノム解析、金融工学、脳波解析など様々な分野で用いられている隠れマルコフモデルに対しては、最尤推定量の漸近正規性さえ証明されておらず、種々のフィルタリング手法による推定量の有効性は証明されていない。さらに、これまで研究されてきた拡散過程は主にジャンプを持たないものであったが、レビー過程を用いたモデリングが金融工学などの分野で盛んになっており(Barndorff-Nielsen(1998), (2000)など)、ジャンプを持つ拡散過程に対する漸近理論が必要とされている。

古典的な拡散過程やポアソン過程を含むジャンプ付き拡散過程をモデルとして用いる分野の中で、金融工学における数学的側面を取り扱う数理ファイナンスが近年盛んに研究されている。そこでは、金融取引の無裁定理論および価格均衡理論が展開され、金融派生商品に対する価格付け法が提案されている。また、実際の市場においてもそうした価格付け法が利用されるようになり、より現実的なモデリングや価格付け公式に対する数値手計算手法の開発の需要が非常に高い。また、旧来の保険数理の分野に数理ファイナンス的アプローチを適用して、信頼性理論における信頼度や危険理論における危険確率に関する理論が再構築されつつある。しかしながら、そこで用いられるモデルの同定や予測には、数理統計学的手法(推定・検定・モデル選択・判別分析・主成分分析など)を用いられることはなかった。

## 2. 研究の目的

(1) 離散観測に基づく拡散モデルの推測問題は、推定量の極限分布が種々の条件のもとで求められている：(a) 観測間隔が短く観測時間が長い場合、(b) 観測間隔が短く観測時間が長くない場合、(c) 観測間隔が一定で観測時間が長い場合。(a)の場合については、観測間隔と観測時間の2つのパラメータに関する漸近展開を同時に求める。これにより、推定量が漸近有効性を保つために必要な、観測間隔(サンプリング精度)と観測時間の長さの関係が明らかになる。(b)の場合には、拡散

係数の形状により推定量の極限分布が正規分布である場合と混合正規分布である場合に大別される。どちらの場合についても2次の漸近展開を求め、ポラティリティーの推測に有効な推定関数の構築をする。(c)の場合には、M推定量の2次以上の漸近展開を求め、ミニマックスの意味の高次漸近有効性を証明する。これにより、時系列モデルによる推測法との優位性が明らかになる。非観測過程がマルコフ性を持つものを総称して、隠れマルコフモデルと呼ぶが、離間時間確率過程である時系列と拡散過程のような連続時間確率過程に大別される。しかしながら、最尤推定量の漸近正規性に関しては、どちらも同じ確率構造が問題となる。したがって、隠れマルコフモデルに共通の一般的な確率構造を仮定して、最尤推定量の漸近正規性を証明し、その漸近展開を求める。これにより、カルマンフィルタやモンテカルロフィルタによる最尤推定量の有効性が証明される。

(2) ジャンプを持つ拡散過程については、その尤度の表現・近似法がまず問題となる。ここでは、Jacod-Shiryaev(1987)による表現を用いて、エルゴード的である場合とノイズが小さい場合の最尤推定量の漸近正規性を証明する。さらに、2次の漸近展開を求め、漸近有効性を証明する。これにより、ジャンプを持たない場合を含め、一般の拡散過程に対する漸近推測理論が完成される。

(3) クレーム総額は従来、複合ポアソン過程でモデル化され、それを基礎に信頼性理論や危険理論が構築されている。これは、数学的な簡便性を優先させるためであり、実際のデータとの適合性は検討されてこなかった。これに対して、指数時間間隔を一般化した再生過程や、あるいは、もっと一般のクラスター過程に対する確率近似計算が可能になりつつある現在においては、実際のデータとの適合度を各種モデルに対して検討すべき段階に来ていると言える。本研究では、複合ポアソン過程を含むマーク付き再生過程でクレーム総額をモデル化し、一般化情報量基準に基づくモデル選択法やパラメータの推測法の構築を目指す。また、そのモデルによる危険理論を再構築し、危険確率のルンドバーグ近似を一般化することを試みる。さらには、トレンドや短期自己相関も取り入れたモデルとして、クラスター過程の可能性も考察する。

(4) 細分化された保険商品とリスクの異なる顧客に対するデータから統計的推測を行うためには、対象外の保険商品と顧客のデータをいかに利用するかが問題となる。信頼性理論では、複合ポアソン過程の正規近似に基づく信頼区間を利用して、推測対象と直接関係しないデータを、当該データとの程度の割合で混合して用いるかを決定する。本研

究では、クレーム総額の確率モデルを複合ポアソン過程から、より一般のものにすることに伴い、信頼区間の構成法を再構築する。また、正規近似の精度を上げるために、漸近展開の利用を試みる。

(5) まず、拡散過程の離散観測に基づく一次の漸近理論に基づく、点推定・区間推定・仮説検定・情報量基準に基づくモデル選択を実行するプログラムを開発し、広範の利用者を持つ統計パッケージ R, Jump, SPSS などから利用可能な形で計算機に実装する。さらに、2 次の漸近展開を利用して、バートレット修正を含むバイアス修正統計量、信頼度・有意水準の修正、コーニッシュ・フィッシャー展開に基づく臨界点の修正などのプログラムを開発し、それらを汎用的な統計パッケージから利用可能にする。ジャンプを持つ拡散過程については、離散幅とジャンプの検出の間に複雑な関係を持つため、まず、ジャンプフィルターの開発を行う。その後、ジャンプを持つ拡散過程の推定問題・検定問題に関するプログラムを開発し、汎用プログラムから利用可能な形で計算機に実装する。

### 3. 研究の方法

本研究では、検定統計量の漸近展開の一般的な表現を得るために必要なテンソル計算を、数式処理技術を利用して遂行することにする。これまでの経験から、手計算による時間は少なくとも数ヶ月はかかることが予想されるが、数式処理技術を利用することで、大幅に時間短縮され、より信頼性の高い結果が得られるものと思われる。したがって、漸近展開の正確な表現を短時間で得るために、数式処理ソフトが不可欠であり、それが稼働する高速で大容量の記憶装置を持つ PC ワークステーションが必要である。また、グリーン関数の数値計算を有限差分法またはモンテカルロ法で行うために、設備備品の明細にあげたような PC ワークステーションのセットが有効に活用される。現在の計算機環境は、事務処理用パソコンですが、それらはモンテカルロシミュレーションや数式処理を行うためには処理速度および記憶容量が極めて不十分であり、研究用の計算専用でもありません。また、数式処理ソフトも現在保有していないため、本調書において申請した PC ワークステーションセットおよび数式処理ソフトは、本課題において必要不可欠です。

ジャンプを持つ拡散過程に対しては、Bichteler ら (1987) による Malliavin 解析を用いると、汎関数に対する部分積分公式を利用することができる。観測時間が長い場合は、リダクション法により、分布の非退化性(リーマン・ルベグの定理)を証明する。その局所化された特性関数に部分積分公式を適用することで、それが可能であると予想される。Yoshida(1992) は、ウィナー過程の汎関数である推定量を無限次元空間上で

定義されたソボレフ空間の元として確率展開を求め、その一般化期待値として分布の漸近展開を求めている。しかしながら、分布の漸近展開を求める場合は、平滑化補題を用いる正当な漸近展開が得られる。本研究では、Malliavin-Watanabe の理論を直接用いずに、特性関数の評価を通して漸近展開を求めることにする。

金融市場モデルとして最も簡単でよく用いられているブラックショールズモデルは、MacBeth(1979)らによる実証研究より、アットザマネー付近でオーバープライスし、インザマネーとアウトオブザマネーでアンダープライスすることが知られている。本研究では、得られた漸近展開を用いて、統計的推定という観点からこの問題を明らかにする。また、この問題を回避するために可変ボラティリティーモデルを用いた価格付けが行われているが、無裁定理論に基づく価格は陽な表現を持たずモンテカルロ法などで数値的な近似計算がされている。しかしながら、モンテカルロ法には精度および計算速度の問題、乱数の性質の問題がつきまとうことがよく知られており、別の方法が必要とされている。本研究では、得られた漸近展開を用いて金融派生商品の価格に対する近似公式を導き、モンテカルロ法との精度の比較を行う。また、漸近展開の高次の係数に表れるキュミュラントだけモンテカルロ法を用いるハイブリッド法の精度・速度を、モンテカルロ法および漸近展開法と数値的に比較検討する。さらに、市場モデルのパラメータに関する統計的推測を基礎にした、価格の推測問題も考察する。

倒産可能性を持つ市場モデルとして、ジャンプを持つ拡散過程を考えると、市場は完備でなくなり、無裁定理論に基づく金融派生商品の価格付けは行えなくなる。しかしながら、市場均衡理論を利用した別の価格付け理論が研究されている。本研究では、ジャンプを持つ拡散過程に関する漸近展開の応用として、倒産可能性をもつ企業の割引債に対するリクスヘッジ問題を考え、Duffie-Singleton モデルなどにおける価格の統計的推測を考察する。

これらの研究を遂行するために、吉田教授(東京大・数理)、内田助教授(九州大・数理)と拡散過程の高次漸近理論や離散観測に基づく推測理論に関して、高橋助教授(東大・経済)とファイナンスモデルへの応用に関して、情報交換を行う。

拡散過程の判別分析に関して、まず、判別対象の情報量が無限に多くなる場合について考える。これは、標本の大きさが大きくなる場合と、イノベーションノイズが小さく場合に分けられるが、それぞれについてベイズ型、プラグイン型、尤度比型のそれぞれの判別ルールの誤判別確率についてその漸近展開を求める。尤度比型の漸近展開は、簡潔には表現できないことが予想されるため、ドリフト

と拡散係数の構造を母数に関して、線形か双曲型になる場合に限定して、展開係数の簡潔な表現を求める。それらから、プラグイン型と尤度比型の高次漸近的な比較を行う。

イノベーションノイズが小さい場合の展開係数には、多重ウィナー積分の条件付き平均が表れることが予想されるので、その評価方法も合わせて考察する。

離散観測に基づく判別法について、Uchida(2002)などの結果を再考する。尤度の近時法として、確率微分方程式の離散近似に基づくものと推移確率の正規近似に基づくものを取り上げ、判別分析における近似精度を考察する。さらに、漸近展開を導出して、高次漸近比較を行う。

判別対象の標本と学習標本が同時に情報量を豊富に持つ場合の漸近展開は、モデルの形状がある程度簡潔でないと、極めて複雑な表現になることが予想される。そこで、プラグイン型と尤度比型の比較を行うためのアプローチとして、判別すべき標本の情報が有限であるときのベイズルールを基準とする漸近相対効率、識別すべき対象がよく似ている場合でもどのくらい識別できるのかという、局所母集団比較における識別力、の2つについて考える。どちらの場合も、誤判別確率の表現はある程度簡単になることが期待されるため、定性的な性質として、判別分析の性能比較が行える。

拡散過程に対する統計的推測理論は、漸近近似を基礎とする。したがって、確率過程に対する統計手法のプログラミングでは、拡散過程の漸近キミュラントをモデルごとに求めるアルゴリズムが必要となる。ドリフトや拡散係数の形状をある程度限定して、漸近キミュラントの陽なる表現をモデルごとに求めて、それらのモデルごとに統計的なデータ解析法のプログラムを製作する。特に、離散観測に対する推測について、エルゴード的である場合と、小さな拡散である場合の、どちらの場合にも、プログラムを作成する。また、ドリフトや拡散係数を解析者が自由に設定できるようなプログラムの開発も行う。その場合、尤度の母数に関する微分やそれらの時間積分が統計的推測を行うためには必要となるが、ドリフトと拡散係数を与えるだけで、そのような微積分を行うシステムを構築する。

プログラムの開発はC言語で行うが、作られた各モジュールを、R、S、SPSS、JUMP、SASなどの汎用的な統計パッケージが利用できるようなインターフェースの開発も同時に行う。また、ドリフトや拡散係数の微積分が必要となる場合、数値的に計算を進める方法と数式処理的に行う方法があるが、どちらの場合についてもプログラムを作成する。数式処理的に行うときは、Mathematica や Maple などの商用ソフトを外部コマンドとして利用する形のプログラムを組むことにする。

判別分析に関しては、若木教授（広島大・

理学部）、藤越客員教授（中央大学）と情報交換をし、プログラム開発に関しては、増田助手（九州大・数理）、清水助手（大阪大・基礎工）と意見交換しながら、研究を進める。

#### 4. 研究成果

離散観測に拡散モデルの推測問題に関しては、観測間隔が一定で観測時間が長い場合については、時系列解析における推定量の漸近展開と同様の展開が得られた。ただし、展開係数はドリフトやボラティリティが非常に簡単な場合を除いては表現が困難であることがわかった。より一般的な例に関しては表現は複雑であるが、計算可能であり、モンテカルロ法による高精度近似と同程度の近似式をあたえることが数値的にわかった。その他の場合の離散観測については、1次の結果を発展させることができなかった。

ジャンプを持つ拡散過程については、エルゴード的である場合とノイズが小さい場合の最尤推定量の漸近正規性を証明が強い条件の下でできた。ただし、実際的な問題に対しては、証明は完成していない。また、漸近有効性の証明に関しては、局所対立仮説の下での確率評価が困難であり、達成しなかった。

クレーム総額のモデルを複合ポアソン過程から飛躍付拡散過程に一般化し、倒産確率の漸近展開を形式的に求めた。それは、ルンドベリの不等式の一般化を導くことが代数的に確認でき、数値シミュレーションによりそれらの正当性を検証した。ただし、漸近展開の剰余項に関する解析的な評価は今後の課題として残った。

保険商品をリスク特性の異なる顧客ごとにオーダーメイドするためには、リスク特性として利用できる指標を抽出する必要がある。多数のリスク特性指標の候補から有効な指標を選ぶには検出力の高い多重検定法が問題となり、従来の多重比較より検出力の高い手法の開発に挑戦した。偽統計的発見率を保証するBH法に着目し、その方法が従属性の下でも有効であることを証明した。この結果は、がん治療のゲノム解析に活用できる方法として期待される。今後、証明の前提となる観測値の連続性を緩めることを試みる。これらの結果を論文誌に投稿する準備中である。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計0件)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

阪本雄二 (SAKAMOTO YUJI)  
神戸大学人間発達環境学研究科・准教授  
研究者番号：70215664

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：