

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 12 日現在

機関番号：32414

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22500263

研究課題名（和文）

線形不等式制約条件の下での推定量理論の展開

研究課題名（英文）

New development of statistical estimation of parameters with linear inequalities restriction

研究代表者

渡辺 元宗（張 元宗）(WATANABE GENSO)

目白大学・社会学部・教授

研究者番号：40227343

研究成果の概要（和文）：

確率優越性(stochastic domination)あるいは、平均 2 乗誤差を評価基準の下で、母平均と分散の双方に順序制約条件がある場合の 2 つの正規母集団における母平均の推定問題を考える。

まず、2 つの正規母集団の未知な分散に順序制約条件がある場合、共通母平均の推定問題を考え、分散についての順序制約を考慮しない推定量が確率優越性の意味で、Nair (1982)、Elfessi らが提案した推定量を含むような改良される広いクラスの推定量が示された。制約条件を考慮されていない Graybill and Deal (1959)が提案した推定量が確立優越性の評価の基準で、改良されたことを示した。

次に、2 つ正規母集団の平均と分散双方に順序制約条件がある場合の母平均の推定問題を考える。大きい分散に対応する母平均の推定については、分散についての順序制約を考慮しない推定量が確率優越性の意味で改良される広いクラスの推定量が示された。しかし、小さい分散に対応する母平均の推定については、分散についての順序制約を考慮しない推定量が平均 2 乗誤差の意味でも一様に改良されないことが示された。また、2 つの母平均の同時推定問題についても、改良が可能であることが示される。さらに、シミュレーションにより、提案された推定量の挙動、改良の度合いを明らかにした。さらに、一般の平均の改良も議論した。

また、Pitman closeness 評価基準の下で、上記の問題も研究し、上記と同様な結果を得られ、Pitman closeness 評価の基準の妥当性を再確認された。

研究成果の概要（英文）：

We first consider the problem of estimating the common mean of two normal distributions with unknown ordered variances. We give a broad class of estimators which includes the estimators proposed by Nair (1982) and Elfessi et al. (1992) and show that the estimators stochastically dominate the estimators which do not take into account the order restriction on variances, including the one given by Graybill and Deal (1959).

Then we propose a broad class of individual estimators of two ordered means when unknown variances are ordered. We show that in estimating the mean with larger variance, estimators which do not take into account the order restriction on variances are stochastically dominated by the proposed class of estimators which take into account both order restrictions. However, in terms of estimating the mean with smaller variance, similar improvement is not possible even in terms of mean squared error. We also show a domination result in the simultaneous estimation problem of two ordered means. Further, improving upon the unbiased estimators of the two means is also discussed.

We also discuss the above problems under Pitman closeness criterion and confirm the validity of

Pitman closeness criterion.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800000	240000	1040000
2011年度	500000	150000	650000
2012年度	500000	150000	650000
年度			
年度			
総計	1800000	540000	2340000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学基礎・統計科学

キーワード：統計的推測

1. 研究開始当初の背景

いくつかの母数の間に線形不等式制約条件がある場合が数多く考えられる。線形不等式制約条件の代表的なものは、順序制約であり、年齢とともに平均値が大きくなると考えられる量、薬品の投与量とともに平均的には大きくなると考えられる反応量について観測値が得られる場合などが考えられる。そのような場合の統計的推測については、推定（点推定および区間推定）・仮説検定を問わず、さまざまな研究が進められてきている。点推定の問題を考えると、一つの自然な推定方法としての最尤推定に関する議論が中心となっており、線形不等式制約を考慮した最尤推定量が制約を考慮しない推定量を改良するものと考えられている。

しかし、多母数の同時推定において改良となるかどうかは、通常、個々の成分の平均2乗誤差の和で測られるが、その意味で改良になっても、個々の成分の推定量として一様な改良となる訳ではない。より一般的な議論として、母数の線形関数の推定量として改良となるかどうかを調べることは一つの重要な問題である。近年になって、線形不等式制約がある場合に、各成分（あるいはその線形関数）の、制約を無視した推定量が平均2乗誤差基準で、あるいは、より強い意味で、制約を生かした推定量により改良されるための条件が議論されている。

しかし、多変量正規分布の場合が中心であり、しかも、限られた場合についてしか議論されていない。

2. 研究の目的

母数の間に線形不等式制約条件がある場合の推定問題において、以下の問題点について、国内外で明確な結論が得られていない。本研究の目的はその問題点をまず正規分布に絞って解明したい。

1. **次元の問題**：非負の正規母平均の線形関数の推定問題に関しては明解な結果(制約条件を満たした MLE が制約条件を無視した不偏推定量より良くなるため必要十分条件は次元が5以下)を得ている (Shinozaki & Chang(Statistics & Decisions, 1999)) が、それ以外の場合については、simple order や simple tree order という単純な状況ですら、明確な結果が得られていない。
2. **制約条件の本数の問題**：p 個の正規母平均に制約不等式が2本がある場合の線形関数の推定に関して、任意の係数に対して、最尤推定量(MLE)は常に不偏推定量よりよくなるのが得られている(Rueda & Salvador (Commun. Statist., 1995)。しかし、3本以上の場合について、まだ、議論されていない。
3. **平均と分散両方に制約条件がある場**

**合の平均および分散の推定問題**：多くの研究は平均に制約条件がある場合の平均の推定問題を扱っているが、平均・分散に両方に大小関係などの制約条件がある場合、平均または(および)分散の推定量およびその性質については解明が必要である。

4. **相関がある場合の順序制約下での推定問題**：多くの論文は独立であるとの仮定の下で議論しており、相関がある場合の議論はほとんどない。また、相関性がある場合の順序制約下での推定問題について明確な結果を得ない限り、次元の問題や制約本数の問題を根本的には解明できないと考えられる。

### 3. 研究の方法

次元数及び線形不等式制約条件の本数の問題の解明に当たって、いくつかの事前研究を行っている内に、特に、simple order、tree order 制約がある場合、母平均の線形関数の推定問題は、相関がある場合の議論と深く関わることを認識している。相関がある場合で、制約条件が与えられた時の推定問題を解明しない限りに、**次元数や及び線形不等式制約条件の本数の問題**の解明に至らない。

従って、①**相関がある場合の順序制約下での推定問題**の解明にまず取り組みたい。順序制約下での2次元正規分布の母平均およびその線形関数の推定を考え、解明の糸口を探る。次に、②**平均と分散双方に制約条件がある場合の平均および分散の推定問題**に取り組む。最後に、①と②の成果に基づいて、集大成として、一般的な**次元数及び線形不等式制約条件の本数の問題**の解明に取り組むたい。

### 4. 研究成果

分散が未知のとき、共通な2つ正規母平均の推定量において、1959年に Graybill と Deal は平均よりよくなる推定量を提案し、平均を改良するための必要十分条件を与えた。1982年に Nair に分散に順序制約条件がある場合、制約条件を考慮しなかった Graybill-Deal 推定量を改良する共通な母平均の推定量を提案した。1992年に Elfessi ら

は確率優越性の評価基準の下で、Graybill-Deal 推定量を改良した推定量を提案した。1995年に Oono と Shinozaki 分散が未知で、母平均に順序制約ある場合、制約条件を無視した従来の推定量を改良するための必要十分条件を与えた。本研究は2つの平均と分散、双方に制約条件がある場合の平均の推定量を研究中心課題にし、以下の結果が得られた。

まず、2つの正規母集団の未知な分散に順序制約条件がある場合、共通母平均の推定問題を考え、分散についての順序制約を考慮しない推定量が確率優越性の意味で、Nair (1982)、Elfessi らが提案した推定量を含むような改良される広いクラスの推定量が示された。制約条件を考慮されていない Graybill and Deal (1959)が提案した推定量が確立優越性の評価の基準で、改良されたことを示した。

次に、母平均と分散の双方に順序制約条件がある場合の2つの正規母集団における平均の推定問題を、確率優越性(stochastic domination)あるいは平均2乗誤差を評価基準として考える。

大きい分散に対応する母平均の推定については、分散についての順序制約を考慮しない推定量が確率優越性の意味で改良される広いクラスの推定量が示された。しかし、小さい分散に対応する母平均の推定については、分散についての順序制約を考慮しない推定量が平均2乗誤差の意味でも一樣に改良されることが示された。また、2つの母平均の同時推定問題についても、改良が可能であることが示される。さらに、シミュレーションにより、提案された推定量の挙動、改良の度合いを明らかにした。

次に、分散が未知のとき、共通な2つ正規母平均の推定において、Kobokawa (1989)に Pitman Closeness Criterion の評価基準の下で、従来の平均を改良する推定量のクラスを提案した。比較する2つの推定量が正の確率で同値である場合、Gupta と Sinha (1992)が提案した評価の基準「修正した Pitman Closeness Criterion」にしたとき、母平均に制約条件があるとき、順序制約条を考慮しない推定量が Pitman Closeness 性の意味で改良される広いクラスの推定量が示された。

従って、母平均と分散両方に順序制約条件があるとき、確率優越性の評価基準の下で得られた結果と同様な結果が得られ、改良の度合いをシミュレーションで明らかにした。

本研究によって、推定量の良し悪しを評価の基準を Pitman Closeness にした場合、その妥当性を再確認した。

詳しい証明内容について、下記の論文を参照されたい。

Chang Yuan-Tsung, Youhei Oono and Shinozaki Nobuo. Improved Estimators for the Common Mean and Ordered Means of Two Normal Distributions with Ordered Variances. Journal of Statistics and Planning Inference. Vol. 142, p. 2619-2628.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Chang Yuan-Tsung Youhei Oono and Shinozaki Nobuo. Improved Estimators for the Common Mean and Ordered Means of Two Normal Distributions with Ordered Variances. Journal of Statistics and Planning Inference. 査読有 Vol. 142, p2619-2628.
- ② Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. Estimation of ordered means of two normal distributions with ordered variances. Journal of Mathematics and System Science. 査読有 Vol. 2. No.1 p1-p7. (2012).
- ③ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. Pitman Closeness Comparisons of estimation of two ordered normal means with ordered variances. Recent Advance in statistics application and related areas. Aussino academic publishing house, Sydney, Austeaia 査読有. p. 1454-1460. (2011)

[学会発表] (計 10 件)

- ① Chang Yuan-Tsung, Oono Youhei and Shinozaki Nobuo A Broad Class of

Estimators for Ordered Means of Two Normal Distributions with Ordered Variances, The 2<sup>nd</sup> Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting. 査読有. p.129-130.(2012)

- ② 張 元宗 篠崎信雄 平均と分散に順序制約がある場合の2つの正規母集団の平均の推定についてのシミュレーションスタディ 2012年日本計算機統計学会第26回大会. 査読有
- ③ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. Estimation of Ordered Means of Two Normal Distributions with Ordered Variances-part II (Numerical Study). ANQ Congress 2012 Hong Kong. 査読有
- ④ 張 元宗 篠崎信雄 平均と分散に順序制約がある場合の2つの正規母集団の平均の広いクラスの推定量 2012 年度統計関連学会連合大会 (北海道) 査読有
- ⑤ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. Estimators for Two Ordered Normal Means with Ordered Variances under Pitman's Closeness and Numerical Analysis. CFE-ERCIM (European Consortium for Informatics and Mathematics) 2012, Oviedo, Spain. 査読有.
- ⑥ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. A broad class estimators for two ordered normal means with ordered variances under Pitman's comparison. The Taipei International Statistical Symposium and 7<sup>th</sup> Conference of the Asian Regional Section(2011). 査読有
- ⑦ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo. Pitman Closeness Comparisons of estimation of two ordered normal means with ordered variances. The 4<sup>th</sup> International Institute of Statistics & Management Engineering Symposium (Dalian, China) (2011). 査読有
- ⑧ 張 元宗 篠崎 信雄 平均と分散に順序制約がある場合の2つの正規母集団の平均の推定 2011 年度統計関連学会連合大会 (京都). 査読有

- ⑨ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo.  
New Types of Shrinkage Estimators of  
Means in Poisson and Multiplicative  
Poisson Models. The 10<sup>th</sup> China-Japan  
Symposium on Statistics, Chengdu,  
China. pp.11-14(2010) .査読有
- ⑩ Chang Yuan-Tsung, Shinozaki Nobuo.  
Estimation of Ordered Means of Two  
Normal Distributions with Ordered  
Variances ANQ Congress 2010 インド  
ニューデリー.査読有

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

渡辺 元宗 (張 元宗) (WATANABE GENSO)

目白大学・社会学部・教授

研究者番号：40227343

### (2) 研究分担者

篠崎 信雄 (SHINOZAKI NOBUO)

慶應義塾大学・名誉教授

研究者番号：70051886

(3) 連携研究者

なし