

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月23日現在

機関番号：35402

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22500267

研究課題名（和文） 有理関数を用いたGARCHモデルによる金融時系列解析

研究課題名（英文） Financial Time Series Analysis by GARCH Model with Rational Functions

研究代表者

高石 哲弥 (TAKAISHI TETSUYA)

広島経済大学・経済学部・教授

研究者番号：60299279

研究成果の概要（和文）：ボラティリティプロセスが収益率に対して非対称になる GARCH モデル（R-GARCH モデル）を有理関数によって構築した。他の非対称 GARCH モデルである EGARCH 及び GJR モデルと情報量基準によって比較し、株価データによっては R-GARCH モデルが有効であることが分かった。また、有理関数で表した確率分布を GARCH モデルの誤差項に利用したモデルも構築し、標準正規分布を利用する GARCH モデルよりも有効であることが分かった。

研究成果の概要（英文）：An asymmetric GARCH model is constructed with a rational function, called “R-GARCH” model. We compare the R-GARCH model with other asymmetric GARCH models such as EGARCH and GJR models by information criterions. We find that the R-GARCH model is superior to other models, depending on stock data we use. We also construct a GARCH model with an error term by a rational function and find that the model is superior to the GARCH model with a standard normal distribution.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：統計科学

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：時系列解析・モデル選択・ベイズ推定・マルコフ連鎖モンテカルロ法・データサイエンス・GARCHモデル

1. 研究開始当初の背景

実証ファイナンスにおいて、ボラティリティは金融資産収益率の変動の大きさを表し、金融資産のリスクを計量するための重要な指標である。しかし、市場で直接計測されるのは収益率のみで、ボラティリティは直接計測されるものではない。そのため、ボラティリティ変動をモデル化し、そのモデルを収益率時系列データにあてはめ、ボラティリティを推定する方法がよく取られる。ボラティリティ変動のモデルとして有名なのは

Bollerslev による GARCH モデルである。このモデルは、収益率分布のファットテイル性やボラティリティクラスタリングといった市場の金融データ収益率に見られる性質をよく表すことができる。一方、収益率時系列データによっては、収益率の上がった日より下がった日の翌日のボラティリティが上昇するというレバレッジ効果が現れる。提唱されたオリジナルな GARCH モデルは過去の収益率の正負に対して対称なボラティリティプロセスとなっており、このレバレッジ効果を

表すことができない。そのため、レバレッジ効果を表すことができるように非対称なボラティリティプロセスに修正した GJR や EGARCH モデル等が提案されている。

2. 研究の目的

GJR や EGARCH モデルでは、ボラティリティの非対称性を多項式で表している。しかし、多項式に基づくモデルが金融市場のデータに一番よく当てはまるかどうかは明らかでない。本研究では、GARCH モデルのボラティリティプロセスを有理関数（分数関数）で表したモデルを構築し、そのモデルの有効性を他のモデルと比較する。モデルパラメータの推定にはベイズ推定を用いる。

GARCH モデルの誤差項は標準正規分布が利用されることが多いが、正規分布より裾野の広がった分布を利用した方が金融時系列データにフィットするという既存研究がある。しかし、どのような分布形が一番フィットするかは明らかでない。有理関数を利用して裾野の広がった分布を表すことも可能であるので、本研究では、GARCH モデルの誤差項を有理関数で表したモデルも構築する。そして、このモデルに対してもベイズ推定を開発し、既存モデルとの比較をする。

3. 研究の方法

本研究では GARCH モデルのボラティリティプロセスが以下の有理関数で表されるモデル (R-GARCH モデル) を提案する。

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}{1 + \alpha_2 y_{t-1}}$$

ここで、 σ_t^2 は時刻 t でのボラティリティ、 y_{t-1} は時刻 $t-1$ での収益率を表す。また、 α_1 、 α_2 、 β 、 ω はこのモデルのパラメータである。このモデルにおいて、 α_2 が非対称性を導入し、特に正の値の場合、前日の収益率が負の場合にボラティリティが大きくなるという実証的に観測されているレバレッジ効果を出すことができる。

本研究ではモデルパラメータをベイズ推定によって推定する。ベイズ推定はマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法によって実行するが、そのための MCMC 法は多次元スチューデント分布を提案分布とする Metropolis-Hastings 法によって開発する。そして、開発した MCMC 法を用いて、東京証券取引所で取引される株価の収益率データに対してベイズ推定を実行し、R-GARCH モデルのパラメータを決定する。また、GJR と EGARCH の非対称 GARCH モデルに対してもベイズ推定を実行しモデルパラメータを決定する。R-GARCH モデルと他の非対称 GARCH モデルと

の比較は DIC 及び AIC の情報量基準によって比較し、どのモデルがより株価収益率データにフィットするか判断する。

GARCH モデルの誤差項に有理関数を用いたモデル (GARCH-RE モデル) は以下の分数関数で表される確率分布を誤差項に用いる。

$$P(x) = \frac{q}{\pi(1 + (q^2 - 2)x^2 + x^4)}$$

ここで、 q はパラメータであり、GARCH モデルのパラメータと共に時系列データにフィットするようにベイズ推定によって求める。そして、GARCH-RE モデルと正規分布を誤差項に用いた GARCH モデルの比較を DIC 及び AIC によって行う。

モデルから推定されたボラティリティの精度を比較するために、高頻度データによって計算された実現ボラティリティを真のボラティリティと仮定し、実現ボラティリティからのズレの大きさによって推定されたボラティリティの精度を測定する。また、実現ボラティリティには計算する際にマイクロストラクチャーノイズや取引のない時間帯の影響等のバイアスが存在するので、それらのバイアスを避ける方法や実現ボラティリティの性質等についても研究する。

4. 研究成果

R-GARCH モデルのベイズ推定を MCMC 法で実行する方法を開発した。MCMC 法は多次元スチューデント分布を提案分布とする Metropolis-Hastings 法を利用した。多次元スチューデント分布のパラメータはモデルの事後分布を近似するパラメータに設定すべきであるが、あらかじめ分かっているわけではない。そこで、初めに簡単な Metropolis 法を実行して生成したモンテカルロデータからそれらのパラメータを見積もり、その後 Metropolis-Hastings 法を実行する。そして、実行しながら、それまでに蓄積されたデータを利用してパラメータを再計算することで、Metropolis-Hastings 法を進める。

図 1 は Metropolis-Hastings 法における 1000 アップデートごとのアクセプタンスである。アップデートを始めた段階ではアクセプタンスは低いですが、アップデートを進めると、75~80% の高いアクセプタンスになっている。

図 2 は多次元スチューデント分布のパラメータとして利用する共分散行列の値の変化を表している。図 1 と同様に 1000 アップデート毎の値であるが、アップデートを進めると早い段階である値に収束している。

この方法で生成されたモンテカルロデータの自己相関関数を計算し、相関時間を求めると非常に小さい結果となり、ここでの MCMC 法の効率が良いことが分かった。

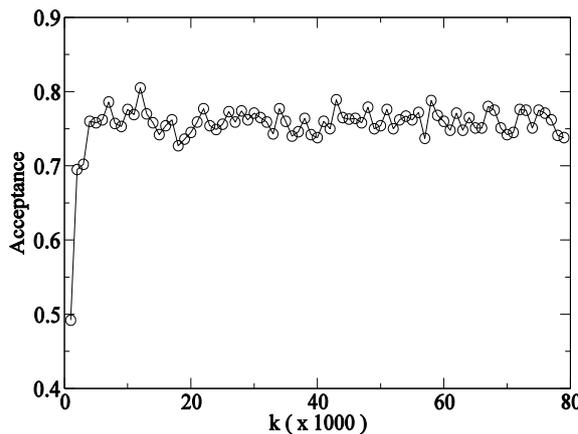


図1 Metropolis-Hastings 法におけるアクセプタンス (R-GARCH モデル)

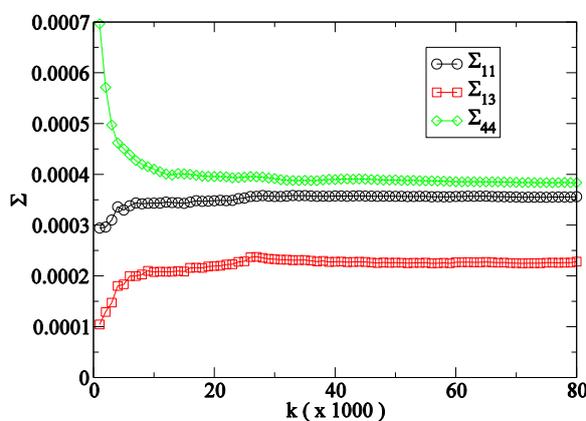


図2 共分散行列 (R-GARCH モデル)

次に開発したMCMC法を用いて、東京証券取引所で取り扱われている株価データに対してベイズ推定を実行した。ここで用いた株価データは、1：パナソニック、2：新日鉄、3：キャノン、4：セブン&アイ、5：ファナックの5つである。そして、2006年7月4日～2009年12月30日までの日次終値を利用した。

R-GARCH モデルと既存モデルの比較を行うために、対称なモデルとして、GARCH モデル、非対称なモデルとして、EGARCH, GJR モデルに対しても同様にベイズ推定を実行した。モデルの時系列データに対する適合度を比較するために情報量基準である AIC と DIC を測定した。表 1 は AIC の結果を表している。ここでの AIC の定義は、小さい値の方がより適合度が良いことを表す。AIC の値は非対称 GARCH モデルの方が対称な GARCH モデルよりも小さい値となり、非対称 GARCH モデルがより株価データに合致する結果となった。すなわち、株価のボラティリティにはレバレッジ効果があることを示している。一方、非対称 GARCH モデルの中でどのモデルがよいかは、株価データによって違っている。表 1 の 2 (新日鉄)

と 4 (セブン&アイ) の株価では R-GARCH モデルが一番合致しているが、他の株価では EGARCH または GJR モデルが合致する結果となっている。従って、株価データによってどの非対称 GARCH モデルが一番良いかは変わり、R-GARCH モデルも有効な非対称 GARCH モデルの候補として扱えると結論できる。DIC の結果はここでは示していないが AIC と同様の結果となった。

表 1 AIC

	1	2	3	4	5
GARCH	3735.9	4029.0	3855.6	3604.8	3923.0
R-GARCH	3731.7	4020.2	3847.9	3583.7	3907.9
EGARCH	3719.0	4025.2	3837.4	3592.9	3901.8
GJR	3724.9	4024.3	3840.0	3584.7	3898.1

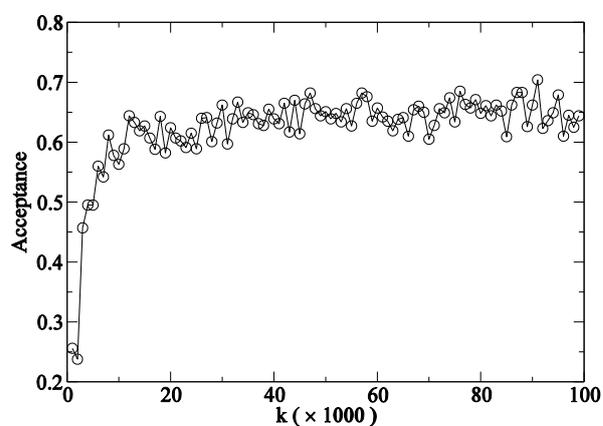


図3 Metropolis-Hastings 法におけるアクセプタンス (GARCH-RE モデル)

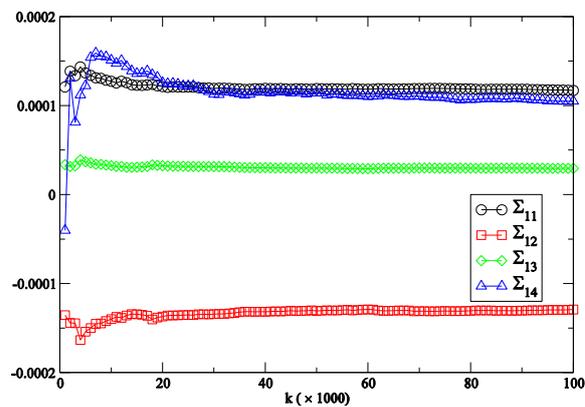


図4 共分散行列 (GARCH-RE モデル)

誤差項に有理関数を利用した GARCH-RE モデルについても多次元学生分布を利用した Metropolis-Hastings 法を開発した。ベイズ推定は 2006 年 7 月 4 日～2009 年 12 月 30 日までのパナソニック (株) の日次終値株価を利用して実行した。

図 3 は Metropolis-Hastings 法でのアクセプタンスを表している。R-GARCH モデルの時と同様にアップデートを進めるとアクセプ

タンスは上昇し、60~70%のアクセプタンスとなっている。図4は多次元スチューデント分布に用いる共分散行列の値の変化を表している。R-GARCHモデルの時と同様に、早い段階で収束しているように見える。

GARCH-REモデルと標準正規分布を誤差項に用いたGARCHモデル(GARCH-Nモデル)との比較はAICとDICを用いて行った。その結果、AICとDICのどちらもGARCH-REモデルの方が収益率データにより合致する結果となった。

更に、モデルから推定されるボラティリティの精度を見積もるために、実現ボラティリティとの比較を行った。

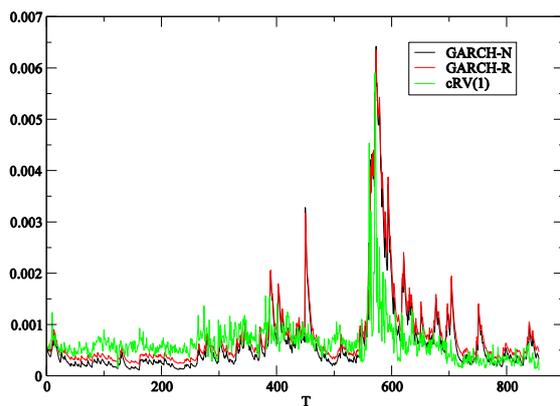


図5 推定されたボラティリティ時系列

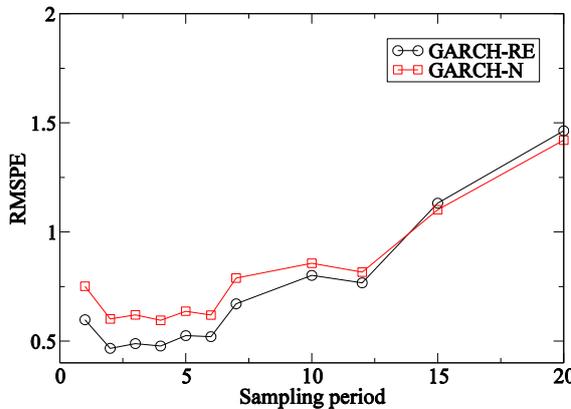


図6 ボラティリティの精度

図5はGARCH-RE, GARCH-Nモデルから推定されたボラティリティの時系列を表している。cRV(1)は実現ボラティリティを表し、1分毎のサンプリングされたデータから計算している。cはマイクロストラクチャーノイズを修正するためのHansen-Lundeファクターである。

図6は実現ボラティリティからのズレをRMPSE (Root Mean Square Percentage Error) で測定した値である。横軸は実現ボラティリティ計算に用いたサンプリング時間(分)である。RMPSEはサンプリング

時間が2~6分で最低値を取っており、またGARCH-REモデルの方が小さい値となっており、GARCH-REモデルの方が精度が良いと言える。

実現ボラティリティの性質についても研究を行った。実現ボラティリティは有限のサンプル数で計算されるので、有限サンプル数によるバイアスがある。このバイアスについて、収益率を実現ボラティリティで標準化したデータを用いて研究を行った。分布混合仮説が成り立っていれば、標準化した収益率は標準正規乱数となると期待される。つまり、それらの分散は1で尖度は3となる。一方、バイアスがある場合、分散は1で変わらないが、尖度は3以下となることが理論的に期待される。

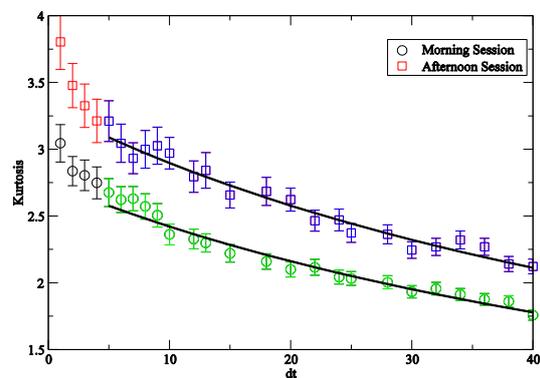


図7 実現ボラティリティによって標準化した収益率の尖度

図7は野村証券(株)の株価収益率データを実現ボラティリティで標準化した後、計算した尖度の値を表示している。日本市場では取引が前場(MS)と後場(AS)に分かれているので、前場と後場に分けて計算を行った。横軸はサンプリング時間(分)を表している。サンプリング時間が大きくなると実現ボラティリティの計算に用いるサンプル数が少なくなり、バイアスが大きくなる。そのために、サンプリング時間が大きくなるほど尖度の値は3からのズレが大きくなることが分かった。また、これらのズレは理論的に期待される値と一致することが判明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① T.Takaishi, Analysis of Spin Financial Market by GARCH Model, Journal of Physics: conference series, 査読有, (掲載決定)
- ② T.Takaishi, Empirical Analysis of

Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo Algorithm, Journal of Physics: conference series, 査読有, 2013, 423, 012021

DOI:10.1088/1742-6596/423/1/012021

- ③ T.Takaishi, Finite-Sample Effects on the Standardized Returns of the Tokyo Stock Exchange, Procedia - Social and Behavioral Sciences, 査読有, 65, 2012, 968-973
DOI: 10.1016/j.sbspro.2012.11.228
- ④ T.Takaishi, T.T. Chen and Z. Zheng, Analysis of Realized Volatility in Two Trading Sessions of the Japanese Stock Market, Progress of Theoretical Physics Suppl. 査読有, 194, 2012, 43-54
DOI: 10.1143/PTPS.194.43
- ⑤ T.Takaishi and T.T.Chen, Bayesian Inference of the GARCH model with Rational Errors. International Proceedings of Economics Development and Research 査読有、Vol.29, 2012, 303-307
<http://www.ipedr.com/vol29/55-CEBMM2012-R00014.pdf>
- ⑥ 高石哲弥、分数誤差関数を利用したGARCHモデルのベイズ推定、金融時系列分析の応用（広島経済大学研究双書第39冊）（2012）111-121、査読無

〔学会発表〕（計8件）

- ① 高石哲弥、分数関数プロセスをもつGARCHモデルによる株価時系列解析、JAFEE 2012 冬季大会、2013年1月25日、筑波大学東京キャンパス文京校舎
- ② T.Takaishi, Effects of Finite-Sample and Realized Kernels on Standardized Returns on the Tokyo Stock Exchange, The Third International Conference “High-Frequency Data Analysis in Financial Markets” 2012年11月17日、広島経済大学
- ③ 高石哲弥、分数誤差分布をもつGARCHモデルによる金融時系列解析、統計関連学会連合大会、2012年9月10日、北海道大学
- ④ 高石哲弥、実現ボラティリティによって標準化された株価収益率における有限サンプリング効果、JAFEE 2012 夏季大会、2012年8月3日、成城大学
- ⑤ 高石哲弥、東京証券取引所における株価実現ボラティリティの分析、JAFEE 2011 夏季大会、2011年10月15日、慶應義塾大学・三田キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高石 哲弥 (TAKAISHI TETSUYA)
広島経済大学・経済学部・教授
研究者番号：60299279