

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 14 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22500804

研究課題名(和文) モデル主義に基づく数学教育の展開

研究課題名(英文) Mathematics Education based on Modelism

研究代表者

池田 敏和 (Ikeda, Toshikazu)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号：70212777

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：本論では、数学教育においてモデルには大きく二つの役割があることを同定した。一つ目は、仮想空間としてのモデルの役割である。モデルは、思考を促進するために別の世界におきかえられた問題や事象を意味し、目的に応じて抽象化、具体化、翻訳という行為を通してモデルがつくられることになる。二つ目は、対比(参照)の対象としてのモデルの役割である。モデルは、アナロジー(類比)を引き出すための見本となる要素間の構造(システム)を意味する。そして、モデルの二つの役割が、小学校算数、中・高等学校数学においてどのような役割を果たすのかについて具体的に議論した。

研究成果の概要(英文)：It was pointed to at least two distinct meanings for model in respect of their epistemological assumptions and implications for teaching. The two distinct meanings we identify are: (1) models as hypothetical spaces in which we conceptualize a particular world situation in order to think about and work on it in order to solve a problem, and (2) models as physical/mental entities for comparing and contrasting which we can use to refer to a different familiar situation, and which can be compared or contrasted among themselves in terms of their capacity to represent and deepen our understanding of some particular phenomenon in the world. Two roles of models are discussed concretely both in elementary and secondary mathematics.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学，科学教育

キーワード：モデル 数学教育

1. 研究開始当初の背景

数学的モデリングは、大きく分けると、次の2つの立場からの指導が考えられてきた。一つは、これまで学習した数学を総動員して現実の問題を解決していくことを意図した場合であり、もう一つは、現実世界の問題を解決することを通して数学的知識の構成を意図した場合である。これら2つの研究については、前者が中心的な役割を果たしており、モデリング能力にはどのような考え方が要求されるのか、またその考え方を育成するにはどのような指導が有効であるかが主な研究内容になっている。一方それに対して、ドイツの Erich.Ch.Wittmann 氏(國本影亀・山本信也訳:算数・数学授業改善から教育改革へ、東洋館出版社、2004)は、「数学が単に技術的、経済的、社会的応用のためのモデル化の補助手段にされてしまえば、数学はその知的活動としての側面を完全に失い、数学という文化に「新数学」以上の破壊的な結果をもたらすことになるだろう。」といった指摘にあるように、単に役立つかどうかの議論で数学の内容を選択していくことを危惧している。

そんな中で、ICMI の百周年を記念したシンポジウムが 2008 年 3 月 5 日(水)~8 日(土)においてローマで開催された。この会議の総合講演の一つとして、Mogens Niss により、「数学の指導・学習における応用・モデリングと「純粹」数学とのバランスについての今後の展望」というタイトルで講演がなされた。そこでは、数学的モデリングの指導が強調される中で、「純粹」数学との指導のバランスをいかに考えるべきかが、今後とも重要な論点の一つであることが再強調された。筆者は、その総合講演のリアクションをつとめており、e-mail によるやりとりを何回も繰り返している。

これらの2つのバランスは、古くて新しい論点である。本研究は、まさにこの2つのバランスをいかにすればよいかを考えていくものである。

2. 研究の目的

「具体的場面(現実世界) 算数・数学」といった抽象化の方向の活動と、「算数・数学 具体的場面(現実世界)」といった具体化の方向の活動とをどのように関連づけることで、児童・生徒の活動を中心とした数学的概念の構成が図れるか、その構成原理を明らかにする。

3. 研究の方法

まず、これまでの先行研究を分析することにより、数学的モデリングを意図した活動と、「純粹」数学における抽象化・一般化等の活動との関係を、抽象化モデルの作成、具体化モデルの作成といった観点から考察し、数学的概念の構成原理を理論的に明らかにする。次に、小学校算数科、中学校数学科において、

主に「数と計算(式)」「図形領域」に焦点を当て、モデルがどのような役割を果たしながら算数・数学の学習が深化していくのかを具体化する。

4. 研究成果

本論では、モデルがあるからこそ算数・数学学習が進展するという考えを基に、算数・数学を応用する立場と算数・数学をつくる立場の両面から、数学教育におけるモデルの役割について考察した。その結果、モデルの役割には大きく二つの役割があることを同定した。

第1のモデル：仮想空間としてのモデル

当面している問題や事象を、それが生じた世界の中で思考・説明することが難しいとき、思考・説明がしやすい別の世界における問題や事象へと置き換え、別の世界の中で思考・説明しようとする。ここでいう「思考・説明がしやすい」とは、思考・説明を促進するための要因が別の世界にはあるわけで、例えば、視覚的に見える形で操作をしながら思考・説明ができたり、馴染みのある世界でイメージを伴いながら思考・説明ができたり、曖昧であった行為や骨格となる構造を明確にして説明ができたり、既に構築したシステムがあるが故に独立に処理できたりする等の点があげられる。モデルは、思考・説明を促進するために別の世界におきかえられた問題や事象を意味し、目的に応じて抽象化、具体化、翻訳という行為を通してモデルがつけられることになる。

第2のモデル：対比(参照)の対象としてのモデル

当面している問題や事象がどのように考えればよいか不明確であるとき、それが生じた場面(世界 A)と類似した馴染みのある別の場面(世界 B)を見出し、別の場面(世界 B)での要素間の構造を見本に、当面している問題や事象を探究しようとする。別の場面(世界 B)は馴染みがある故に要素間の構造を熟知しており、場面(世界 B)が類似しているが故に、対比することで他の部分も類似しているのではないかというアナロジー(類比)が働くわけである。モデルは、アナロジー(類比)を引き出すための見本となる要素間の構造(システム)を意味する。

これらの二つのモデルは、共に問題が生じた世界とは異なるもう一つの世界につくられ、学習内容に依存して、第1のモデル「仮想空間として」の役割から第2のモデル「対比(参照)の対象として」の役割へと広がっていくことになる。そして、最終的には、目的に応じて、第1のモデルと第2のモデルが有機的に関連づけられながら、児童・生徒の思考を手助けすることになる。そして、児童・生徒の内的な世界に構築された算数・数学が、仮想空間としてのモデルと対比の対象としてのモデルの両方から活用できるようになると、二つの世界が対比的に扱えるよう

になり、「互いが互いを成長させる」ことを可能とする。二つの世界をふりこのように行ったり来たりすることによって、両者の世界の間にある未知な要素、不整合な要素が新たな問いを引き起こすための原動力になり、両方の世界を互いに成長させることにつながっていくわけである。特に、不整合な要素は、新規な考えを引き出すことが要求され、革命的な知識獲得に繋がる重要な要因と言える。これがモデル志向の相互啓発的な性格であり、モデル志向の核心である。

そして、モデルを志向した算数・数学学習の中で頻繁に用いられる数学的思考法を双対関係に着目しながら下記の三つに特定した。これら三つは、「何に着目して、何をするのか」によって特徴づけられる。そして、算数・数学学習において、これらは相互に作用しながら進展していくことになる。

(1) 抽象化と具体化という双対関係

二つの世界間の類似関係をつくらうとする考え方である。自分の考えている問題を別の空間で考えられるようにするために、具体的なものの本質を捉え抽象化して考えたり、抽象的なものを具体化して考えたりして考察する行為である。

(2) 直観的推論と反省的推論という双対関係

各々の世界の中での論理的関係をつくらうとする考え方である。「AならばB」という命題を導き出すために、「いったいどうなるか」といった結果を直観的に探ったり、「何故そうなるか」といった根拠を反省的に考え論理的に説明したりする行為である。

(3) 一般化と特殊化という双対関係

各々の世界の中での論理的関係の一部である命題「AならばB」に対して、Aの適用範囲を動的に動かす考え方である。考えている対象をより深く理解するために、自分の考えている対象を動的に捉え、それらを広げて考えたり、限定して考えたりする行為である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Ikeda, T. (2013). Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction, In Gloria Ann Stillman, Gabriele Kaiser, Wener Blum and Jill P. Brown(ed), *Mathematical Modelling: Connecting to Practice – Teaching practice and the practice of applied mathematicians* (pp.255-275), Springer. 「査読有」

池田敏和 (2013)。「モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連」, 『日本数学教育学会誌』第95巻第5号, pp.2-12. 「査読有」

Toshikazu Ikeda, Max Stephens and Yuki Wada(2012) A Teaching Experiment in Modelling through Scale Reduction Methods: A Bridge to

Later Trigonometric Methods, Journal of Mathematics and System Science, Vol.2 Number 6, pp. 359-367. 「査読有」

マックス・ステフェンス・池田敏和(2012)「数学的モデル化の必要性とその方法」, 『日本数学教育学会誌』第94巻第3号, pp.2-8. 「査読無」
Max Stephens, Toshikazu Ikeda and Yuki Wada(2012) Teaching modelling through reduction methods, V I N C U L U M (Australia) Vol.49 TERM1, pp.12-17 「査読無」

池田敏和・渡邊公夫(2010)『図形領域における複数の下位体系を行き来する活動に焦点を当てた教材開発』, 数学教育学会誌, Vol.51 No.1・2, pp.39-50. 「査読有」

Toshikazu Ikeda and Max Stephens(2010) Three teaching principles for fostering students' thinking about modelling: An experimental teaching program for 9th grade students in Japan, Journal of Mathematical Modelling and Applications, Vol.2 No.1, pp.49-59. 「査読有」

Toshikazu Ikeda, Max Stephens and Yoshihisa Tanaka. (2010) Mathematical modelling giving meaning to mathematics: A case study of Japanese textbooks seventy years ago, Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol.2, pp.591-598. 「査読有」

[学会発表](計4件)

池田敏和(2011) 数学的活動を意図した授業づくり, 第93回全国算数・数学教育研究(神奈川県)大会(招待講演), 川崎市中原市民会館.

Toshikazu Ikeda(2011) Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in the Teaching of Mathematics(Plenary Lecture), 15th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications(招待講演), Australian Catholic University (Australia).

Toshikazu Ikeda, Max Stephens and Yuki Wada(2011) A Teaching Experiment in Modelling through Reduction Methods: Intended as a Bridge to later Trigonometric Methods, 15th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, Australian Catholic University (Australia).

池田敏和(2010)「指導系列としての問題解決はいかに? - 数学二類「測量」「三角形と三角関数」の指導系列を手掛かりに - , 日本数学教育学会.

[図書](計2件)

池田敏和(2012)「小・中学校の学習の円滑な接続を重視した算数・数学科の授業改善(pp.90-93執筆分担)」, 新しい教科書と授業改善, 学校図書.

池田敏和(2010)「数学的モデル化」, 『数学教育

学研究ハンドブック』, 東洋館出版社, pp. 272-281.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田敏和 (Ikeda Toshikazu)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号: 70212777