

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 26 日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22530952

研究課題名(和文) 小学校と中学校の接続の観点からの比例的推論の進展の契機の探究

研究課題名(英文) Study on the opportunity to improve proportional reasoning from the perspective of articulation between primary and lower secondary school curriculum

研究代表者

日野 圭子 (Hino, Keiko)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：70272143

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：目的：中学校1年生の比例的推論の実態を探るとともに、式・表・グラフの表現様式に対する生徒の意味づけの1年に渡る進展を追跡し、授業をデザインする。

方法：公立中171名に対して4月に筆記調査を行い、また、調査結果に基づいて、「比例の不変性の認識の状態」が異なる生徒14名を抽出し、継続的に個別インタビューを行った。

結果：筆記調査から生徒の比例的推論に大きな個人差が見出された。インタビューにおいても、多くの生徒は予想以上に多様な表記をかき、表記への意味づけも様々であった。生徒の数量関係の捉え方を4タイプに分け、表記への意味づけの特徴等を整理した。得られた結果を基に、中1における一連の授業案を作成した。

研究成果の概要(英文)：Purpose: To understand 7th graders' proportional reasoning and to trace their learning trajectories of different representations for proportional relationship over one year, and to design a series of lessons on the basis of the results.

Method: To conduct written assessment to 171 students in two public schools. From the results of the assessment, to select 14 students who are in different levels on the conceptualization of rate, and to conduct task-based interviews over one year (2-5 times per student).

Results: From the written assessment conducted at the beginning of the school year, large differences on proportional reasoning were found. During the interviews as well, the students expressed quantitative relationship given in the tasks in a variety of representations. Their variations were explored by distinguishing four types of their ways of grasping the relationship. By using these results, a series of lessons in the areas of "Number and Expression" and "Function" were designed.

研究分野：教育学

科研費の分科・細目：教科教育学

キーワード：比例的推論 小中の接続 数学教育 数学的表記

1. 研究開始当初の背景

研究代表者である日野は、ここ十年程、子どもの比例の考えの変容という視点から、研究を行ってきた。特に、比例に関わる数学的表記が導入されたり扱われたりする授業の中で、数学的表記への子どもなりの意味づけと、彼らの比例の考えの変容との関わりを捉えるモデルを、個々の子どもの事例を通して構築してきた。

日野のこれまでの研究は、主として小学校高学年を対象としている。しかしながら、比例の学習は、小学校だけではなく中学校においても行われる。更に、小学校と中学校で扱われる内容や表記については違いもあり、その違いが、子どもの比例の考えを更に進展させていく契機になると考えられる。本研究では、中学校第1学年の生徒達に焦点を当て、生徒への筆記調査と継続的なインタビュー調査を通して、この契機を探っていく。

これまででも、比例に関して、小学校と中学校の接続の観点から教授実験を行い、児童生徒の学習を捉える研究が行われてきている(例: 大谷・中村・漢野, 2001; 大谷・漢野・中村, 2002; 久保, 2013; 久保・岡崎, 2013)。しかし、小学校での比例の単元と、中学校での比例の単元という2つの単元の間の期間を含めて、生徒の学習を追跡することはあまり行われていない。本研究では、中学校1年の1年間にわたる生徒への数回の個別インタビューを通して、同一の生徒の比例の問題に対する応答の様子を、継続的に観察・分析を行っていく。

2. 研究の目的

本研究の目的は、小学校での比例の学習を終え、中学校に入学してきた生徒の比例的推論の実態を探るとともに、比例の式、表、グラフという異なる表現様式に対する生徒の意味づけが、1年の期間にどのように相互に影響しあいながら進んでいるかを捉えることである。

生徒が示す意味づけの道筋を調べる中で、比例的推論の進展を示す情報、あるいは、停滞に関わる情報を見つけ、いかなる進展の契機が隠れているかを探っていく。そして、生徒の現状に基づいて、中学校1年での数と式、および、関数領域の学習指導についての知見を得る。

3. 研究の方法

近年の記号論的視点について、先行研究の一部を整理し、本研究での視点を定める。中学校1年の生徒を対象に、データの収集と分析を行い、結果を整理する。ここでは、2つの研究問題を設定して探究を進める。

問1. 中学校入学初期の生徒は、比例的推

論においてどのような特徴を有するか。また、比例関係を表す表、式、グラフに対して、どのような意味づけをしているか。

問2. 中学校1年の1年間において、生徒の比例の問題に対する応答の様子、特に、比例関係を表す表、式、グラフに対する意味づけは、どのように変容するか。生徒の比例的推論は、変容にどのように関わっているか。

問1に対しては、入学初期(4月)に筆記調査を行い、生徒の比例的推論の特徴と、表、式、グラフに対する理解の様子を捉える。

問2に対しては、筆記調査をもとに選出した、比例的推論の洗練の度合いの異なる生徒14名に対して、1年間にわたって個別インタビューを行い(2回~5回)、比例の問題に対する生徒の応答の様子を追跡する。特に、生徒の表、式、グラフの使い方の特徴と、その変化の様子を考察する。

得られた結果に基づいて、中学校1年での数と式、および、関数の領域における学習指導についての知見を引き出す。また、今後の研究課題を明らかにする。

4. 研究成果

についての結果

本研究では、記号や形式が人の思考の組織化において決定的に重要な役割を果たすという立場に立って考察を進める。このような立場は、数学学習の記号論的視点として、現在、数学教育で活発に研究が進められている。そこで、2000年以降の動向と課題の一端として、本研究に直接かかわる記号と意味の相互作用を捉える視点について、先行する研究を参照した。

また、本研究に対して示唆を与え得る幾つかの先行研究をレビューし、知見や課題、本研究との関連を考察した。先行研究では、生徒による表、式、グラフ表現の使用から、様々な生徒の見方が抽出されているが、特に、「操作と構造」「変化と対応」「特殊と一般」「具体と抽象(シンボル化)」という4つの対比的な見方についての研究を参照した。これらの情報は、本稿でのデータを解釈していく際に、手がかりになる。次に、より長期的に生徒の数学的表記の使用を探っている研究を見ることによって、表記使用についての変化がどのように捉えられているのかを見て行った。これに関しては、あまり研究は行われていないが、結果のみならず、生徒の追跡の手法についても学び取ることをねらった。

についての結果

問1について

比例的推論の実態を捉えるために、Kaput & West(1994)の内包量の概念化、使用の仕方

についての枠組みを使った。彼らは、本質的に異なる2つの内包量の概念化を区別し、比例的推論の発達モデルを示している。それは、「比率としての比」(実態・状況・出来事の一般的な記述としての内包量の概念化)と「特定の比」(特定の例についての比の記述)という区別であり、「特定の比」「比率としての比」という発達の方向がある。

この枠組を用いて、栃木県内の公立中2校(M校,W校)の1年生合計171名に対して、4月に筆記調査を行った。調査問題では、比例の求答問題(欠損値問題と比較問題)および2量の比例関係を把握し、グラフや式に表す問題を扱った。

その結果、生徒の内包量の概念化(比の不変性の認識の程度)については、約4分の1の生徒が、「比率としての比」に近い認識を示しており、問題文から適切に単位対を生成したり、単位対を使ったりして答を導いていた。残りの4分の3の生徒は、比の不変性の認識において多様な状況であった。「特定」と「比率」の間は重層的になっており、生徒はその間に散らばっていた。

一方、比例の問題場面のグラフや式による表現においても、生徒は多様な反応を示した。記号表現と比例的推論との関わりを考えたとき、比例的推論は、式、グラフによって場面を表すことと興味深い関係にある。直接的に関係する側面と、そうではない側面の両方が確認できるためである。

直接的な関わりが見られるのは、問題文に書かれた比率についての情報を読み取り、適切なデータを生成する部分である。ここでは、書かれた比の不変性を意識し、適切な単位対を作ったり使ったりすることが求められる。つまり、それが出来ないと、グラフや式での表現に支障を来すことになる。筆記調査の結果を見ると、グラフにおいて、43%の生徒は比の一定性を読み取ってデータを生成していたが、それをしていない生徒も見られた。式においては、ことばの式では16%、文字式では21%の生徒が、問題から「1Lでは15km進む」ことを推論することができたが、そうではない生徒も多数存在した。

一方、今回の調査を通して、グラフや式という表現に特徴的な面においても、学習の必要があることが見えてきた。これらの学習は、内容のみならず、表現の形式に関わる側面である。グラフにおいては、1次元の表現から2次元の表現への切り替えの学習である。Moritz(2003)は、データの1次元的配置を「単一の側面」と呼んでいる。Moritzの3~9年生への調査では、「単一の側面」には、表の他に、様々な1次元的配置を示す図や絵が分類された。本調査の生徒は、場面を表す図や絵を描くことはなかったが、数直線という特徴的な図を描いていた。日本の小学校では、数量の乗除の関係を扱う際に数直線がよく使われる。生徒の中には、小学校の学習で馴染み深い1次元的配置と、グラフとい

う2次元的配置との違い、また、数量の変化する関係を表すために、複数のデータを配置する仕方を1次元から2次元へと変えていくことの意味や価値が伝わりにくい生徒がいる。式においては、答を求める式から、事柄や関係を表す式への切り替えの学習である(杉山,2008)。この大きな切り替えを意識した小学校から中学校にわたる式の系統的な指導が必要である。それは、小学校のみならず、中学校においても引き続き行われるべきであることが分かる。

問2について

問1での筆記調査に基づいて選出した「比の不変性の認識の状態」が異なる生徒14名に対して、その後1年間にわたって継続的(2~5回)に個別インタビューを行った。M校6名、W校8名である。14名は、筆記調査の結果から、「特定の比」に近いA層から「比率としての比」に近いD層まで4つの層に位置付けられた。

インタビューは、臨床的インタビューの手法を取り入れた「課題ベースのインタビュー」であり、1回あたり20~30分間で行った。生徒に数学の問題に取り組んでもらい、異なる表現(グラフや式)への表し方、あるいは、問題の解き方を中心に、話を聞く方法を取った。問題と質問項目は、以下の点について予め計画したが、生徒の様子に応じて調整することがあった。

- ・ 問題場面及び比の特徴について
- ・ 質問のタイプについて
- ・ 式やグラフといった表現の指定について
- ・ 共通問題の設定について

インタビューにおいて収集した音声記録は、すべて書き起こし、プロトコルを作成した。また、画像記録については、プロトコル内に、主だった手の動き、また、生徒がかいた順序や消し去った内容などの表記の生成や修正に関わる情報を書き入れた。

データの分析にあたっては、各質問項目に対する各々の生徒の反応を一覧表に整理をするとともに、観察メモの内容を参照しながら、各インタビューで生徒がかいた表記の特徴、表記を作り出す際に生徒が目じた情報、生徒の表記に使い方の特徴についての考察を文章の形でまとめた。そして、生徒の間で見られた共通点や相違点について検討した。表記を作り出す際に生徒が目じた情報、また、生徒の表記の使い方の特徴については、コードを作成し、コードを使って生徒の反応の多様性を解釈していった。

その結果、M校、W校どちらの生徒も、比例・反比例の指導の前だけでなく指導の後であっても、予想以上に多様な表記をかき、また、表記への意味づけも様々であることが分かった。指導後のインタビューでは、インタビューア(日野)によって要求される以前から、生徒が表や式をかき出す場面が見られた。

比例・反比例の授業の中で、それらの表現が指導されたり、使われたりしていたことが影響していると考えられる。しかしながら、上述したように、生徒による表や式の使い方には様々な個人差が見られた。Yerushalmy (2000) は、問題解決において代数的解法を使うことは、学力の高い生徒と低い生徒で大きな差があることを述べているが、本稿の生徒も類似の傾向があった。更に、生徒には、グラフにおいても、更には、言葉や図等による語り方においても違いがみられた。

更に、各々の生徒に対して、一連のインタビューでの反応を、縦断的に見て行った。実際、上記の横断的な検討において、生徒間での相違はあるものの、生徒の中では、一貫しているものがあることを示唆する観察事項が確認されてきていた。結果を見ていくにあたっては、生徒の比例的推論の洗練の度合いが影響をしていると考え、A~D の層に沿って、各コードの出現状況などを調べていった。しかし、反応の中にある一貫性を説明することが難しかったため、何回かデータ（特に、比例・反比例の指導前に行った第1, 2回のインタビューのデータ）を見直すことにより、比例的推論の洗練の度合いも組み入れた次の4つを区別することにした。

- ・ 「特定の比」への偏りが見られる生徒
- ・ 共変関係への注目が優勢な生徒
- ・ 個別の対応関係への注目が優勢な生徒
- ・ 共変と対応関係への柔軟な見方が見られる生徒

この4つは、比例の場面での生徒の数量関係の捉え方の特徴であり、特に、中学校での比例・反比例の指導が行われる以前に生徒によって持たれている考えである。従って、生徒の小学校での比例の学習を色濃く反映していると考えられる。この4つの区別に沿って、生徒の応答の特徴や、生徒が直面した困難点、また、比例・反比例の指導の後の生徒の応答にみられる変化の様子を記述した。

最後に、得られた結果から、学習指導に対する(1)~(4)の示唆をまとめた。

- (1) 数量関係の捉え方についての個人差は大きい。これは、数量の関係をどう捉え、どう使っていくかという面で、生徒は発達の上にあるということを示している。共変関係への注目と対応関係への注目に区別したときに、その両者を柔軟に使うことのできる生徒、どちらかの関係への注目が優勢している生徒、そして、まだ2量が伴って変わっていくということ自体への注意がなされていない生徒が存在する。共変関係への注目と対応関係への注目を、授業の中で予想し、両者を扱っていくことが必要である。
- (2) 生徒の異なる数量関係の捉え方に刺激を与え、進展を促していく上で、表、グラフ、式という異なる表現様式を、授業の中で、活用していく。これらの表現様式を使って、問題場면을記号化したり、

探究したりしていく際に、生徒の異なる捉え方が表出する。従って、生徒がかく種々の表記を授業の中で取り上げることで、生徒の異なる捉え方を交流していくことができる。

- (3) 具体的な問題場면을、授業の中に取り入れ、生徒が、式やグラフを使って問題を表したり、記号表現を操作して、問題場面に働きかけたりしていくような場面を作り出す。これは、シンボル化の視点の取り入れに関わる。実際、問題場면을、式やグラフといった記号表現が記号化している程度を見たときに、ここにも、生徒にとってのハードルがあった。
- (4) 生徒の数量関係の記号化の方法に関するメタ的なディスコースを、教師が意識し、時には、それを議論の対象にする。ここでのメタ的なディスコースには、その記号化の方法を使うことのメリットを認識しているかどうか、また、何をどのように認識しているかという点を含む。異なる記号化の方法を使うことに関する生徒なりのコンセプトは、聞かれている質問に答えるには狭かったり、適していなかったりすることがあるので、授業の中で議論の対象にすることが大切である。

についての結果

以上の結果を配慮し、「数と式」、「関数」の内容領域において、次のA)とB)の機会を意識して取り入れていく授業デザインを考えた。

- A) 表、グラフ、式等の表現を用いながら解を求めたり、問題を解決したりする。
- B) 問題場면을、表、グラフ、式等の表現で表したり、表された表現から内容や関連性を読み取ったりする。

- A) については、生徒が、異なる数学的表現（対応図、表、グラフ、式等）を使って推論・判断をしたり、自分の推論・判断について説明したりすることを促す。ここでは、上記の示唆(1)を意識したい。
- B) については、例えば、「数と計算」において、式が中心となっているところへ、表やグラフによる表現で表すことを促していく。それによって、生徒の多様な見方を抽出して比較したり（示唆(2)）、別の表現で表したり表現に操作を加えたりすることで見えてくるものを考えたり（示唆(3)）、あるいは、そのような表現で表すことのメリット等を考えたり（示唆(4)）する。従って、B)においては、次のような活動を、取り入れることも意義がある。
 - ・ 生徒が、自分の数学的表現について説明したり、数学的表現の適切性や

- 妥当性について考えたりする
- 生徒が、ある特定の数学的表現(表現上の規約を含む)を使うことのメリットやデメリットについて考える。

このような方針のもと、「数と式」「関数」の領域での授業案を作成した。(授業案の詳細についてはここでは省略)

今後の課題として以下が残された。

- 本研究で提案した授業のデザインを実施し、生徒の様子を観察する。また、教室でのディスコースの視点から、教師と生徒との授業中の相互作用で用いられている言葉や表記の分析をする。
- 可能であれば、複数名の教師に協力をお願いし、小学校での関数の内容の上に、中学1年の内容をつないでいく上での、より実際に即した手だてや工夫を、共有していく。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計3件)

日野圭子. (2014). 「小中移行期の生徒による比例の問題場面の表現の特徴: 個別インタビューにおける共通問題への応答の比較」. 『宇都宮大学教育学部紀要』, 査読無, 64号, 第1部, pp. 95-110.

日野圭子. (2013). 「中学校入学初期における生徒の比例的推論の多様性: 筆記調査の結果と示唆」. 『宇都宮大学教育学部紀要』, 査読無, 63号, 第1部, pp. 117-129.

日野圭子. (2011). 「異なる問題場面における生徒の比例の式の扱い: 「比例」学習前の中1生徒への筆記調査から」. 『宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要』, 査読無, 34, pp.39-48

[学会発表](計6件)

日野圭子. (2013). 「中1生徒による比例の問題場面の表現に関する考察」. 『第46回秋期研究大会発表集録』, 査読無, pp. 299-302, 11月

日野圭子. (2012). 「中1生徒による式の生成における比例的推論の影響: 個別インタビューの結果の考察から」. 『第45回数学教育論文発表会論文集 第2巻』, 査読有, pp. 653-658, 11月

Hino Keiko. (2012). Students creating ways to represent proportional situations: In relation to conceptualization of rate. *Proceedings of the 36th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 283-290). 査読有, Taipei (Taiwan), 7月

日野圭子. (2011). 「生徒が作り出した数量の関係を表すグラフ」. 『日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文

集 第2巻』, 査読有, pp.681-686, 11月
日野圭子. (2011). 「数学学習における記号論的視点の近年の動向と課題」. 『日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文集 第1巻』, 査読無, pp.11-20, 11月

Hino Keiko. (2011). Students' uses of tables in learning equations of proportion: A case study of a seventh grade class. *Proceedings of the 35th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3., pp.25-32). 査読有, Ankara (Turkey), 7月

6. 研究組織

- (1)研究代表者 日野 圭子 (HINO Keiko)
宇都宮大学・教育学部・教授
研究者番号: 70272143