

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月22日現在

機関番号：10101
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540002
 研究課題名（和文） 特異ユニタリ表現に対する幾何学的不変量とモデル理論
 研究課題名（英文） Geometric invariants and model theory for singular unitary representations
 研究代表者
 山下 博（YAMASHITA HIROSHI）
 北海道大学・大学院理学研究院・教授
 研究者番号：30192793

研究成果の概要（和文）：本研究では、リー群の特異既約ユニタリ表現の実現について、幾何学的アプローチによる研究を行った。第一に、簡約リー群の特異ユニタリ最高ウェイト表現について、基本的表現のテンソル積を（表現に対する）幾何学的不変量を用いて分解することによって、テータ双対性対応の拡張を与える Dvorsky-Sahi 理論のフォックモデル版を築いた。第二に、実階数4の例外型単純リー群の四元数型構造から生じる既約概均質ベクトル空間上の特異軌道をルート系の情報を用いて記述した上で、Gross-Wallach によって発見された四元数型特異ユニタリ表現が、冪零 K -軌道の幾何学的量子化によって実現されることを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we investigated realization of singular irreducible unitary representations of Lie groups through geometric approach. First, we have established the Fock model version of Dvorsky-Sahi theory on an extension of the theta duality correspondence for singular unitary highest weight representations of reductive Lie groups, by decomposing tensor products of fundamental representations in terms of geometric invariants for representations in question. Second, the singular orbits in prehomogeneous vector spaces arising from quaternionic structure of exceptional simple Lie groups of real rank 4 have been described by using data on root systems, and we have proved that the singular quaternionic unitary representations, due to Gross and Wallach, can be realized by geometric quantization of the corresponding quaternionic nilpotent K -orbits.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：代数学・群の表現論

キーワード：リー群, ユニタリ表現

1. 研究開始当初の背景

リー群の無限次元ユニタリ表現の研究は、ディラックらによる量子力学における考察に

端を発し、群論・環論はもとより、整数論（特に保型形式の理論）、微分幾何学、関数解析学、代数解析学をはじめとする多くの分野と

深く関り合いながら、飛躍的な発展をとげてきた。例えば ローレンツ群などの各種古典群を含む簡約リー群に対しては、ルート系・旗多様体・極大コンパクト部分群などの豊富な内部構造を活用し、表現の誘導・コホモロジー・D-加群など様々な手法で既約許容表現が分類・構成されてきた。このような基本的成果を踏まえて、簡約リー群のユニタリ表現論はいま、ユニタリ表現を、それに密接に関わる等質空間や群軌道の構造と新たな視点から関連づけて深く追究することによって、表現論自身の深化と関連諸分野との連携の両面での進展が期待される状況にある。

研究代表者は、上記の現代的視点から簡約リー群の既約表現と冪零軌道との間の関係を統一的に解き明かすことを目標とした研究に一貫して取り組み、不変微分作用素、表現の幾何学的不変量、テータ対応や冪零軌道の関口対応等の双対性理論を駆使して独自の研究成果を蓄積してきた。とくに近年、エルミート型簡約リー群のユニタリ最高ウェイト表現について、「複素解析的冪零軌道に関連した一般ホイットackerモデル」、「既約表現の幾何学的不変量としての等方表現（随伴サイクルの精密化）」及び「一方がコンパクトな簡約双対対に関するテータ対応による表現の実現（古典群の場合）」の3つの理論が三位一体であることを明らかにした。

この方向の成果を深化・展開させるためには、古典群に限定されるテータ対応の理論の拡張し、例外型群を取り込んだ研究を行うとともに、最高ウェイトを持たない特異ユニタリ表現を対象とした研究を推進する必要があると強く認識していた。

2. 研究の目的

本研究は、簡約リー群の特異ユニタリ表現に対して、良い実現（モデル）の理論を当該表現に付随する幾何学的不変量を駆使して築くことを主な研究目的とし、ユニタリ最高ウェイト表現・四元数型表現等に対する表現の双対性対応及び冪零軌道理論の研究を進めることにより、リー群のユニタリ表現論の深化・発展を目指した。特に、既約ユニタリ表現の随伴サイクルに伴う等方表現が、当該ユニタリ表現のモデルをいかに制御しているかをより明確に見極めることに研究の主眼をおいた。

3. 研究の方法

(1) エルミート型簡約リー群の基本的ユニタリ最高ウェイト表現（Wallach 表現）のテンソル積の分解を記述するために、対応する複素解析的冪零K-軌道の直積集合上の（対角作用による）K-軌道を精査した。その結果、懸案の場合には、直積集合上に稠密な開軌道が存在し、その境界部分の余次元が2以上で

あることが分かった。この事実に基づき、研究代表者が構築した随伴サイクルに伴う等方表現の理論を活用して、当該開軌道上の正規関数のなす誘導加群を標準的に分解したものが、まさにテンソル積表現の既約分解を与えることを導いた。

また、これに関連する研究として、二重一般旗多様体上の軌道の有限性に関する十分条件（西山連携研究者らによる）が成り立つ場合を特定する定理（近藤・西山・落合・谷口）に、ケース・バイ・ケースの考察に依らない、統一かつ簡明な証明を与えた（arXiv:1204.1118 参照）。

(2) 四元数型特異ユニタリ表現の研究においては、当該例外型リー代数のルート系に係る詳細データに基づき、極大放物型概均質ベクトル空間の軌道の代表元を、ルートの強直交系を用いて構成するとともに、冪零軌道に関するディンキン・コストANT理論を活用して、当該軌道の次元や固定部分群を具体的に求めた。これらの結果自体は井草らにより既に知られているものではあるが、リー理論に基づく計算を実行することで、四元数型冪零K-軌道の許容データの特定など、本研究のテーマである特異ユニタリ表現の研究に結びつけることが可能になった。

なお、上記の四元数型表現に対する研究は、朱富海（南開大学）が日本学術振興会招へい研究者として北海道大学に滞在中（2011年7月～9月）に、研究代表者と開始した共同研究であり、2012年5月に最終的な結果を得ている。

(3) 上記(1)、(2)のいずれの場合においても、特異ユニタリ表現を冪零K-軌道上のベクトル束の代数的切断の空間（誘導表現）上に実現するためには、当該冪零軌道の閉包が代数多様体として正規であることを検証することになる。そのために、放物型誘導に関するボレル・ヴェイユの定理を用いて当該誘導表現のK-スペクトルを記述し、あるいは、Kingによる軌道の正規性に関する研究を活用することなどにより、正規性の検証を行った。

(4) 以上の研究を実施するにあたっては、下記の研究集会を活用して、関連分野の研究者と研究打合せや情報交換を重ねた。

- ① 表現論と調和解析に関する南開夏季学校・国際研究集会（各年度6月、南開大学（中国天津市）にて開催）
- ② 表現論をテーマとしたRIMS研究集会（各年度6月、京都大学）
- ③ 表現論シンポジウム（各年度11月頃、開催場所不定）
- ④ 表現論ワークショップ（各年度12月、鳥取市）

⑤ Geometric/categorical aspects of representation theory (2012年2月, 北海道大学, 阿部連携研究者主催)

⑥ 表現論とその関連分野(2011年3月, 北海道大学, 阿部連携研究者主催)

⑦ Topics in the theory of Weyl groups and root systems (2011年9月, 東京大学)

⑧ The 10th workshop on nilpotent orbits and representation theory(2011年2月, 九州大学)

また, 北海道大学表現論セミナーを活用して, 本研究組織メンバー間で恒常的に研究打合せを行った。

4. 研究成果

(1) 簡約リー群の特異ユニタリ最高ウェイト表現について, スカラー型 Wallach 表現のテンソル積表現を随伴サイクル及び等方表現を用いて既約分解することによって, テータ対応の拡張に関する Dvorsky-Sahi 理論のフォックモデル版を構築した。さらに, テンソル積表現の既約分解に現れる特異ユニタリ最高ウェイト加群が, 対応する等方表現からの誘導によってフォック実現できることを示した。

これによって, 特異ユニタリ表現に対する等方表現の既約性について, 従来個別の計算に依存していた多くの部分を統一的に導くことが可能になった。さらに, テータ対応の理論ではカバーできない EVII 型例外型群の階数2の特異ユニタリ表現についても, 本研究で構築した理論の範疇で取扱うことが可能になった。

(2) 実階数4の例外型単純リー群 FI, EII, EVI, EIX に対して, 四元数型構造から自然に生じる既約複素概均質ベクトル空間の特異軌道と固定部分群をルート系の情報を用いて記述した。同時に, 各特異軌道の固定部分群のリー代数を, ディンキン図形を用いて導出する方法を発見した。これらの結果を基に, 四元数型特異冪零 K-軌道に対する許容データを特定し, 当該冪零軌道の正規性を検証の上, Gross-Wallach によって発見された四元数型特異ユニタリ表現が冪零 K-軌道の幾何学的量子化によって実現されることを示した。

この研究成果は, (余) 随伴軌道の量子化によってリー群の既約ユニタリ表現を構成するという指導原理「ユニタリ表現に対する軌道の方法」のフォックモデル版を, 四元数型表現という興味深い場合に実現するものである。この方向の研究には, 古典群の場合にはテータ双対性対応の理論を用いたものが知られているが, 本研究はその適用範囲を超え, 取扱が困難な例外型群のユニタリ表現を対象としている点においても, 先進的である。

(3) 上記(1)及び(2)の結果は「5. 主な研究発表等」に記載の論文(速報版)や学会講演を通して発表するとともに, その後の進展を取り込んで, 下記の2編の論文にとりまとめ中である。

① A. Wachi and H. Yamashita, Isotropy representations for singular unitary highest weight modules.

② H. Yamashita and F. Zhu, Quantization of quaternionic nilpotent K-orbits.

また, 本研究を引き続き深化・発展させるために, 随伴軌道の幾何学的量子化の枠組みにおいて, 特異冪零軌道に広い意味で対応する既約ユニタリ表現を特定し, その良い実現を与えることを目指した研究「簡約リー群の特異冪零軌道の量子化とユニタリ表現の実現」(研究期間:2013~2015)を, 科学研究費助成事業の一環として実施することとした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

① 山下博, 単純リー群の特異ユニタリ表現の幾何学的実現と随伴サイクル, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1825, 2013, 142-152.

[学会発表] (計7件)

① 山下博, 朱富海, Quantization of quaternionic nilpotent K-orbits, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月 21 日, 九州大学 (福岡市).

② 山下博, 単純リー群の特異ユニタリ表現の幾何学的実現と随伴サイクル, RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」, 2012 年 6 月 21 日, 京都大学 (京都市).

③ Hiroshi Yamashita, Quaternionic nilpotent K-orbits and their quantization, Summer school and workshop on representation theory and harmonic analysis, 7 June 2012, Nankai University (China).

④ 山下博, 特異ユニタリ最高ウェイト加群の Fock 模型と等方表現, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 29 日, 東京理科大学 (東京都).

⑤ 山下博, Irreducible decomposition of tensor products of Wallach representations and isotropy representations for singular unitary highest weight modules, 2011 年度表現論ワークショップ, 2011 年 12 月 26 日, 県民ふれあい会館 (鳥取市).

⑥ Hiroshi Yamashita, Isotropy representations and an extension of the theta correspondence, 2011 Nankai international workshop on representation theory and harmonic analysis, 7 June 2011, Nankai University (China).

⑦ Hiroshi Yamashita, Isotropy representation associated with the discrete series, 2010 Nankai international conference and summer school on representation theory and harmonic analysis, 6 and 8 June 2010, Nankai University (China).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山下 博 (YAMASHITA HIROSHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：3 0 1 9 2 7 9 3

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：7 0 2 1 5 5 6 5

澁川 陽一 (SHIBUKAWA YOUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：9 0 2 4 1 2 9 9

阿部 紀行 (ABE NORIYUKI)
北海道大学・創成研究機構・特任助教
研究者番号：0 0 5 5 3 6 2 9

西山 享 (NISHIYAMA KYO)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：7 0 1 8 3 0 8 5