様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月１０日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：基盤研究（c）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４０００３
研究課題名（和文）　次元の一致の非可換化

研究課題名（英文）　A noncommutative extension of the coincidence of dimensions

研究代表者
森田　英章（MORITA HIDEAKI）
室蘭工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号：90435412

研究成果の概要（和文）：対称群のスプリンガー加群は、次元の一致という組合せ論的性質をもつことが、報告者により発見された。さらに、ホール＝リトルウッド対称函数の分解公式に基づき、その表現論的解釈を得ることに成功している。今回の研究では、これら一連の理論の非可換化を行うことが目的であり、基盤となるべきホール＝リトルウッド対称函数の適切な非可換化を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：The Springer modules for the symmetric group have a certain combinatorial property called the coincidence of dimensions. The reporter succeeded in giving the property an interpretations in terms of representation theory of the symmetric group, based on the factorization formula for the Hall-Littlewood functions. In this study, I have intended to extend this theory in a noncommutative setting, and have succeeded in giving a proper noncommutative extension of the Hall-Littlewood functions in my point of view.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：（非可換）対称函数、対称群、次数表現

１．研究開始当初の背景
（１）報告者により発見された、対称群のスプリンガー加群に対する次元の一致という組合せ論的現象は、その後協力者とともに、表現論的な解釈を与えることに成功した。
　その本質は、スプリンガー加群の次数指標を与えているグリーン多項式の組合せ論的性質に帰着されるが、さらにそれはホール＝リトルウッド対称函数の助変数に１の冪根を代入した際に発生する「分解公式」に支えられている。従って、報告者（ら）によって得られた一連の成果の本質は、ホール＝リトルウッド対称函数の分解公式にある。

（２）ロシア＝フランス学派によって、対称関数環のある非可換化が提唱された。これは、行列式を用いて記述される対称関数環の理

論を、ロシア学派によって提唱された非可換成分をもつ行列の行列式に相等する概念である準行列式を用いて書き換えることを目指して導入されたものである。

（３）対称函数の理論における今日的な興味の中心は、ホール＝リトルウッド対称関数、およびその一般化であるマクドナルド多項式にある。現在、非可換対称関数論の発展に呼応し、これらの対称関数の非可換化が、様々な観点から提唱されている。

２．研究の目的

（１）ホール＝リトルウッド対称関数やマクドナルド対称関数の非可換化は、現在、ヘッケ環の表現や、ロドリゲスの公式を背景としたものが提唱されているが、いずれもスプリンガー加群の表現論的・組合せ論的性質を直接の起因としたものとは言いがたい。

この研究においては、スプリンガー加群のあり方を直接反映した、ホール＝リトルウッド対称関数の非可換化を与えること、およびその一般化としてのマクドナルド対称関数の非可換化を与えることが目的である。特に、マクドナルド対称関数の非可換化は、ガルシア＝ハイマン加群の表現論的・組合せ論的性質と密接な関連を持つ事が期待される。

（２）以上の議論は、本質的には準行列式の理論にその基盤を置いている。この観点から、対称群の非可換表現論の構成を行う。マクマホンの基本定理を通じて、モリーンの公式や、組合せ論的ゼータ関数との関連が示唆される。特に、モリーンの公式は、有限群の表現と組合せ論的ゼータとの関連を直接的に示唆しており、スプリンガー加群の次元の一致とも密接な関連をもつ。

これら一連の話題の非可換化、すなわち準行列式により定式化も目的とする。

３．研究の方法

（１）スプリンガー加群の既約分解の様子を直接反映した形で、ホール＝リトルウッド対称関数の非可換化を構成する。ホール＝リトルウッド対称関数は、スプリンガー加群のフロベニウス特性式を与えているので、シュアー関数の一次結合への展開係数をみれば、既約分解の様子がわかる。

しかし、非可換対称関数環においては、可換シュアー関数の直接の非可換化は定式化されておらず、このプロセスを直接実行することはできない。

一方、非可換対称関数環の基底としてもっとも用いやすいものに、非可換リボン・シュアー関数がある。これは（可換）リボン・シュアー関数の直接の非可換化をあたえているので、ホール＝リトルウッド対称関数を、（可換）リボン・シュアー関数の一次結合に展開し、その展開式において（可換）リボン・シュアー関数を対応する非可換リボン・シュアー関数で置き換えることにより、ホール＝リトルウッド対称関数の非可換化を定式化する。

その後、適切な分解公式が成立するかを検証し、是とされれば、それをもってスプリンガー加群のフロベニウス特性式としてのホール＝リトルウッド対称関数に対し、その適切な非可換化が得られたと解釈する。

（２）マクドナルド対称関数は、二つの助変数をもつ対称関数であり、ガルシア＝ハイマン加群とよばれる二重次数付き対称群加群の次数付きフロベニウス特性式をあたえている。

報告者は、マクドナルド対称関数の分解公式を証明し、それを基盤として、ガルシア＝ハイマン加群の次元の一致、およびその表現論的解釈を与えた。そこで、マクドナルド対称関数に対しても、それがガルシア＝ハイマン加群の特性式を与えることに基づき、その非可換化を定式化し、かつ適切な分解公式を与える。

基本的には、ホール＝リトルウッド対称関数の場合と同様に議論を進めることが可能であると考えている。すなわち、マクドナルド対称関数の、（可換）リボン・シュアー関数による一次展開において、（可換）リボン・シュアー関数を非可換リボン・シュアー関数に置き換えることにより、まず非可換マクドナルド多項式を定式化し、それが適切な分解公式を満たすことをもって、ガルシア＝ハイマン加群に対する特性式としてのマクドナルド多項式の非可換化と認識する。

（３）モリーンの公式を準行列式により書き換えることによって、対称群の表現論の非可換化を行う。モリーンの公式は、有限群の表現を一つ固定した場合、各元の表現行列 B と、それに同じ型の単位行列 I に対して、I-B の行列式の逆数の群平均を取れば、不変式環のヒルベルト級数が得られることを述べた結果であるが、行列式を準行列式に取り替えたものを考察の対象とし、表現行列が非可換成分をもつ表現の自然な構成を行う。

また、このような「行列式分の１」という形をした式は、グラフゼータ関数の行列式表示や、有限鏡映群上定義される離散力学系のゼータ関数の行列式表示にも現れる。この観点から、モリーンの公式やマクマホンの基本定理の準行列式化をあたえ、組合せ論的ゼータ関数の非可換化を与える。

４．研究成果

(1)森田＝デクーアンによるマクドナルド対称関数の分解公式に対して、一部の特別な場合ではあるが、組合せ論的な証明を与えることができた。

森田＝デクーアンによるマクドナルド対称関数の分解公式は、非可換化をした際の妥当性の根拠の一つとして、報告者は非常に重視している。マクドナルド対称関数の非可換化を行う際に、ガルシア＝ハイマン加群の表現論・組合せ論が背景されている根拠として、分解公式が成立することを一つの指標としているが、一般に非可換化を考えた場合、対象物の組合せ論的存在性がより顕著に際立つことが認められることが多い。

一方、ハグルンドらによって、マクドナルド対称関数の組合せ論的な公式が得られている。これは、マクドナルド対称関数を、ヤング盤に対する二種類の統計量を用いて記述する公式である。この組合せ論的公式に基づいて分解公式の証明が行えれば、分解公式の組合せ論的構造が明確になることが期待され、非可換マクドナルド対称関数を構成する際の一助となることが期待される。

我々は、ある特別な場合に、ハグルンドらの組合せ論的公式から、森田＝デクーアンの分解公式を直接証明することに成功した。証明は、ある二つのクラスのヤング標準盤の集合の間に、全単射を構成することにより行われる。

（２）ホール＝リトルウッド対称関数に対して、スプリンガー加群の次数付きフロベニウス特性式としての非可換化を与えた。

ホール＝リトルウッド対称関数の非可換化に関しては、すでにいくつかの先行研究が存在するが、それらはヘッケ環の表現論の立場からのものや、ロドリゲスの公式の立場から行われた。ここでは、スプリンガー加群の次数付きフロベニウス特性式としてのホール＝リトルウッド対称関数に着目し、その観点から自然な非可換化を与えることに成功した。ここで、ホール＝リトルウッド対称関数は、自然数の分割により添字付けられるが、非可換ホールリトルウッド対称関数は、分割をより一般化した、自然数の組成分解という概念を用いて添字付けられることに注意しておく。

（可換）ホール＝リトルウッド対称関数は、対応する分割が鈎型の場合には、リボン・シュアー関数の一次結合で表すことができる。その際の展開係数は、自然数の組成分解に対する逆メジャー指数という統計量を用いて記述される。この展開式を、一般の組成分解に対して形式的に拡張し、非可換リボン・シュアー関数の一次結合を構成すると、そのように定義された非可換対称関数は、すでに可換理論において対応する自然な意味付けは失われるが、分解公式は望ましい形で保持している。可換の場合には、この分解公式がスプリンガー加群の次元の一致における本質的な意義を持っていた事から、上で構成した非可換化が適切な分解公式を持つ点をもって、スプリンガー加群の視点からの非可換化として、その正当性を主張している。

（３）グラフゼータ関数もしくはL−関数の新たな行列式表示を、二種与えた。いずれも、「行列式分の一」もしくはそれにスカラー補正を加えた形をしている。

一方では、一般の有限グラフに対して行列ウェイトのL−関数を定義し、その行列式表示を与えた。またその系として、グラフの正則被覆の行列ウェイトゼータ関数を、行列ウェイトL−関数の積として表す分解公式を得た。

他方、有限有向グラフの重み付きバルソルディ・ゼータ関数に対し、新たな行列式表示を与えるとともに、それを重み付きL−関数にまで拡張している。その系として、バルソルディ・エッジ・ゼータ関数の行列式表示を、一般の有限グラフおよび有限有向グラフに対して与えた。

いずれも、「行列式分の一」もしくは若干のスカラー補正を加えた形をしており、リンドン語を用いた、半群上での一般的な設定から導出できる形をしており、準行列式を用いた非可換化の可能性を有している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①H. Mitsuhashi, H. Morita and I. Sato, A new determinant expression for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph, Electronic J. Combin. 査読有, 20(1)(2013), #P27.

②H. Mitsuhashi, H. Morita and I. Sato, A matrix-weighted zeta function of a graph, Linear and Multilinear Algebra, to appear, http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03081087.2013.764496#.UbW2oBbTJjA

③F. Descouens, H. Morita and Y. Numata, A bijective proof for the factorization formula of Macdonald polynomials at roots of unity, Euro. J. Combin. 査読有, 33 (2012),1257-1264.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669812000364

〔学会発表〕(計 2 件)

① 三橋秀生・森田英章, 非可換 Hall-Littlewood 関数について, 組合せ論的表現論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, ２０１２年１０月１２日.
② 森田英章, マクドナルド多項式のベキ根における分解公式 , BC 系と AGT 予想の周辺, 東京大学, ２０１０年９月１２日.

〔図書〕(計 1 件) T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Y. Numata, A. Wachi and J. Watanabe, The Lefschetz Properties, Springer Lecture Note Series, 査読有, 出版決定.

６．研究組織

(1)研究代表者

森田　英章 (MORITA HIDEAKI)
室蘭工業大学大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90435412

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：