科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 15 日現在

機関番号：13501
研究種目：**基盤研究（C）**
研究期間：2010–2012
課題番号：22540006
研究課題名（和文）　**堅牢なアーベル函数論の構築と精密化**
研究課題名（英文）　Elaborate construction of a concrete theory of Abelian functions

研究代表者
大西 良博　（ÔNISHI YOSHIHIRO）
山梨大学 教育学研究科 教授
研究者番号：60250643

研究成果の概要（和文）：　(1) 初年度には, 本研究の現状の理解を交換し合うため, 国際研究集会に出席し, 講演および専門家との議論を行ひ, 研究の方向付けを詳しく決めた. (2) 海外研究者の招聘により, σ 函数に関する新しい加法公式を発見した. (3) 種数 3 の trigonal 曲線に付随する Kummer 多様体の定義方程式を具体的に決定した. (4) σ 函数の原点における冪級数展開について種々の結果を得た.

研究成果の概要（英文）：　(1) The first year, I participate in an international work shop on this subject, and gave a talk and had discussions with its participants. Then I planed the direction of this three year research supported by JSPS. (2) I invited foreign researcers working on the subject. They and I got a quite new addition formula for general genus one curve. (3) With some foreign researchers, I got a explicit and simple system of equations of the Kummer variety coming from a general genus three trigonal curve. This also gave a nice realization of A. Coble's unique results. (4) We investigated on the expansions of some sigma function at the origin.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論, 数論幾何

1. 研究開始当初の背景

この方面の源流となる研究を開始した 1990 年ころは次元が 2 以上の Jacobi 多様体, Abel 多様体について, 精密に計算できる理論はほとんど無かつたといつてよい. 中には θ 函数を使つた結果がいくらか存在したが, それはかなり解析的なもので, 代数的に使ひ易い形の定式化は知られてゐなかつた. しかし, H.F. Baker を中心とした 100 年程前の研究が “発掘” されて, 最近になつて, Jacobi 多様体の理論を, 函数論的な道具も含めて具体的に構成し直す動きが, 数理物理と数論の双方から出てきた. 本研究もその一部であり, この 10〜20 年で, Jacobi 多様体の具体的な道具は現代的に整備され, とても満足のいくものになつた. 本研究は, その大きな流れのなかで, 使用できる様になつた道具を大いに利用して, いままでの抽象論では試すことが難しかつたいくつかの方向に踏み出して, 研究をするといふ目的で始まつたのである.

以下での引用の便宜のため, いくつかの文献を

ここに挙げる.

参考文献表

[参 1] J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matustani, Y. Ônishi, and E. Previato: Abelian functions for trigonal curves of genus three, International Mathematics Research Notices, 2008:1(2008)102-139

[参 2] J.C. Eilbeck, S. Matustani and Y. Ônishi: Addition formulae for Abelian functions associated with specialized curves, Phil.Trans. Royal Society A, 369(2011)1245-1263

[参 3] Y. Ônishi: Determinant expressions for hyperelliptic functions, (with an Appendix by Shigeki Matsutani: Connection of The formula of Cantor and of Brioschi-Kiepert type), Proc. Edinburgh Math. Soc., 48(2005)705-742

2. 研究の目的

(1) 研究対象について　どんな楕円曲線も（基礎環が何でも）

$$y^2-(\mu_1x+\mu_3)y \\ -(x^3+\mu_2x^2+\mu_3x+\mu_4)=0$$

(μ_j は定数) の形の方程式で定義されることが知られてゐるが, 本研究では, これを含む一般的な形

$$y^d-x^s-\sum_{a,b}\mu_{ds-ad-bs}\,x^ay^b=0$$

（ただし $\gcd(d,s)=1$ で $0\leqq a<d$, $0\leqq b<d$ で $ad+bs<ds$）で定義される平面曲線を主に扱ふ. この型の曲線を (d,s)-curve と呼ぶ. これまでの研究代表者の研究等により, この種の曲線を研究することが重要である理由をいくつか挙げる：

① 無限遠には 1 点のみ存在するが（それを単に ∞ と記す）, そこにおける極の位数でもつて weight を付ける, 即ち x と y の weight をそれぞれ $-d$, $-s$ とすることで, この曲線に対応する Abel 函数の様々な等式が斉重になる;

② この曲線の Jacobi 多様体に自然な stratification を導入することで, ① の様々な等式を偏微分して得られる等式が各階層（stratum）で非常に有効に働く;

③ また, この型の曲線は全代数曲線の中でも比較的大きな family をなしてゐるので, まずはこの型の曲線で, 研究を進めて, その後より一般の曲線に向ふのが有効だと考へられる, 等々

特に ② によつて, Abel 函数を 1 変数函数の"積み重ね"として眺めることができ, それをうまく総合することで, 多変数函数としての構造を復元し, より明晰な理解を得ることができる. その顕著な結果として Bernoulli 数の高い種数の Abel 函数への一般化が本研究代表者により得られてゐる ([論 4]).

この様に, 本計画は一般の (d,s)-curves について, 計算による実験などを想定した
具体的で堅牢な Abel 函数論を構成することが目的である.

(2) 具体的な目標とその意義.
以下, 本研究で得られると予想された成果について述べる.

① Hurwitz 整性. σ 函数の原点における冪級数展開は Hurwitz 整性と呼ばれる良い性質を持つことが観測されてゐる. これに証明を付けること.
② Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示公式の拡張. $(2,3)$ 曲線 $\mathscr{C}$ に付随する σ 函数と $\mathscr{C}$ 上の代数函数との間に成り立つ Hermite-Frobenius-Stickelberger に由来する重要かつ美しい行列式表示式がある. これを特殊な (d,s) 曲線にまで様々な形で一般化してきたが, さらに, 一般な (d,s) 曲線に対して一般化する.
③ σ 函数の加法公式の拡張. 上記の ② は現れる変数がすべて曲線上の普遍 Abel 被覆上を動くが, その変数の定義域を全空間 (種数次元の vector 空間) に拡張した公式もまた重要である. 本研究代表者と共同研究者により, それもいくつかの場合に得られたが, さらなる拡張に目途が立つてゐる. それを実現したい.
④ σ 函数の解析的構成法と代数的構成法の比較. σ 函数にはいくつかの構成法がある. しかし, これらの構成法で同じ σ 函数が得られる仕組みは完全に解明されていゐない. 例へば全体に掛かる定数の調整や, Riemann 定数の具体的な値等については未解明である. この点を詳しく探る.
⑤ Riemann 定数の計算.
Riemann 定数の計算の仕方を考察する. これについては全く進展なし.
⑥ Vaninshing 性定理の精密化.
σ 函数の高次導函数の零点集合は Jacobi 多様体の Wirtinger 部分集合と呼ばれるものによる層化 (stratification) と完全に噛み合つたものになることが, 知られてゐる ([参 3] 等). これの (d,s) 曲線に対しての予想を [発 3] で述べた. その一部分は中屋敷氏による方法や松谷氏と Previato 氏による方法で示されるが, 研究代表者はこれが σ 函数自身の零点の位置だけからある単純な方法で得られることを [発 3] で述べた. これを一般な形で証明すること.
⑦ Jacobi 多様体, Kummer 多様体の定義方程式. Buchstaber, Enol'skii, Leykin 等の理論は Jacobi 多様体の定義方程式を matrix construction なる方法で実現する方法を試みてゐる. 一方 Jacobi 多様体の定義方程式を書き切るためには, 適当な因子 (divisor) 上にのみ極を有する Abel 函数全体のなす環の構造を具体的に決定すれば良い. その方法で, 具体的に Jacobi 多様体や Kummer 多様体の定義

方程式系を与へることを目標とした.
⑧ 普遍 Bernoulli 数と一般 Bernoulli-Hurwitz の理論の展開. 本研究の魁の時期に得た一般 Bernoulli-Hurwitz の理論を代数体の整数論に応用することを目指した.
⑨ Recursion, Heat equation. σ 函数の原点における冪級数展開の係数は閉ぢた形の漸化式を満たす. その様な漸化式は θ 函数が満たす熱方程式を σ 函数の言葉に焼き直すことで得られることは Weierstrass に源がある. この方法は Buchstaber, Leykin, Enolskii の共著論文で扱はれ, 種数 2 には完全に具体的に拡張された. これを, 種数の高い他の曲線の場合に拡張したい.

3. 研究の方法

(1) 海外研究者の招聘と研究代表者の出張による研究交流

本研究計画では, 海外研究者の招聘や研究代表者自身の国内出張により, その都度, 明確にされた問題を集中的に議論する事が要となつてゐる. 実施内容は次の通り：

2010 年 10 月 9 日から 1 週間程, 研究代表者が Scotland に出張してこの方面の専門家と交流し, 当該研究の近辺の現状を把握した. 特に以下を目標とした: ① σ 函数の原点での冪級数展開に関する Hurwitz 整性, ② Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の公式 (σ 函数の加法公式), ③ 新しい形の加法公式を得ること, ④ σ 函数の代数的構成, ⑤ Riemann 定数の計算方法, ⑥ σ 函数の vanishing 性予想の証明, ⑦ Kummer 多様体の定義方程式系, ⑧ Bernoulli-Hurwitz 数の応用. ⑨ σ 函数の展開係数を漸化式で計算すること.

本課題は整数論全般の研究の進歩と密接に関はることが多いので, 早稲田大学で毎週開催される整数論 seminar に 3 ヶ年を通じて出席し, 整数論研究の現状を常に把握するやう努めた. (早稲田大学の整数論 seminar は, 伝統があり, 現在も非常に活発な交流の場である.)

第 1 年度に交流した研究者から 2 名を招聘しての共同研究 (2011 3 月 23 日〜4 月 11 日) を行つた. (これは前年度に, 特殊な事情で招聘できなくなり, 本補助金の繰越に運営交付金を合せて利用して招聘した. また, 研究集会も開催した ([他 2]).

随時, 国内での発表と email 等を使つて研究の推進をし, Web での情報発信も行なつた. 2012 年度には, 最終的な取り纏めのために, 再度の海外出張を実施した.

(2) 招聘と出張の状況

出張先とその時期を記録しておく.

① 早稲田大学, 整数論セミナー
`http://www.waseda.jp/sem-wnt/`
3 年間で計 24 回の出席

② 早稲田大学 整数論研究集会
`http://www.waseda.jp/sem-wnt/symposium/index.html`
- 2012/3/19-21 第 16 回
- 2012/3/16-18 第 17 回 (研究代表者の講演あり)

③ 海外出張
- 2010/10/9-16, ICMS at Edinburgh, The higher-genus sigma function and applications Oct. 11, 2010 - Oct. 15, 2010 `http://icms.org.uk/workshops/sigma`
- 2012/12/7-19, University of Edinburgh

④ その他の出張
- 2012/11/28 津田塾大学,

4. 研究成果

(1) 主な成果

① Hurwitz 整性. 頭初の予想と少し異なり, 分母に 2 が現れることがある. これもほとんど control できてゐて, 著書 [図 1] にその原因を述べた. (分母に 2 が現れる規則を完全に見極めてから論文として発表する.)
② Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示公式の拡張. 本研究代表者の得た公式は中屋敷氏が最近いくつか発表してゐる結果に一部含まれてゐるが, 一般の (d,s) 曲線に対して, 中屋敷氏の方法では導き出せない新公式を得た. その証明を $(3,5)$ 曲線の場合に例示する仕方で [論 6] に発表した.
③ σ 函数の加法公式の拡張. Eilbeck 氏, 松谷氏, 本研究代表者の共著論文 [参 2] を拡張し, 全く一般の種数 1 の代数曲線に対して, 新しい型の加法公式を与へた. これは, 最も簡単な場合を $(2,3)$ 曲線について得た. 論文にまとめて [論 3] に upload した. これは, σ 函数の加法公式を新たな方向に拡張するのに非常に示唆に富む結果であると思はれる.
④ σ 函数の解析的構成法と代数的構成法の比較. 中屋敷氏がかなり一般的な方法を得たが, それは平坦直線束の理論と KP 方程式に関する佐藤理論を援用してゐる. これをより代数的に構成する方法を少し [図 1] に書いた. また, Segal-Wilson の方法を使ふことで, 平坦直線束の理論を避ける事ができる筈であることはわかつたが, これは将来の課題とする.
⑤ Riemann 定数の計算. Riemann 定数の計算の仕方については全く進展がなかつた. これは困難な問題である. 他の研究者によるいくつかの進展があるがここには述べない.
⑥ Vaninshing 性定理の精密化. 完全に一般な定式化はできてゐないが, その方法の詳細を [論 6] に述べた. この性質は Riemann の特異性定理を完全にしたものでもあるので, 非常に重要である.
⑦ Jacobi 多様体, Kummer 多様体の定義方程式. 本計画を走らせ始めた段階では, 研究は全くうまく進まなかつた. しかし Previato 氏の idea で A. Coble の独特の理論を使ふ方法を試すことになり, 結果, 成功を納めた. 現在論文にまとめつつある. 概要は早稲田大学での研究集会で口頭発表した. 報

告集が近日中に出版される [論 1] に記事を掲載される.
⑧ 普遍 Bernoulli 数と一般 Bernoulli-Hurwitz の理論の展開. 頭初の到達目標は達成できなかつたが, その目標がどの程度の困難さを有するのかをある程度まで突き止めた. 例へば p 進 L 函数との結び付きを数値実験で探ることは非常に困難であり, その最初の非自明な例を計算することは現状では絶望的であることを東京大学での seminar [発 2] で発表した ([他 3] にその内容). 従つて, 実験をして現象を捕捉することは不可能であつて, 純粋に論理的な手段しかないのかも知れない. また, かつて JSPS の補助金を使つて研究した成果をまとめたこの件についての論文が漸く出版された ([論 4]). 様々な面で, この出版も本研究費の補助を受けてゐる.
⑨ Recursion, Heat equation. Buchstaber, Leykin, Enolskii の共著論文で扱はれた方法を program に実装し, 多くの項が非常に高速に得られることを確認した. 得られた項は web 上に data として upload してある ([他 4]). $(3,4)$ 曲線についても多くの結果を得てゐるが, 発表までにはまだなすべきことが残つてをり, それを鋭意検討中である.
⑩ (追加) Prime forms. 頭初の計画にはなかつたが, 松谷氏と J. Gibbons 氏による要請で prime 形式の研究を行つた. 結果は [論 2] として査読つき学術誌に出版された.

(2) 成果の国内外での位置付け, impact 等.

① Coble の超曲面に関する古典的な結果は度々, 代数幾何学者の興味を引いてゐて, θ 函数を利用した研究はいくつもあるが, これ程に代数的でかつ簡明な結果は今までにはなかつた.
② (3,4) 曲線から来る Kummer 多様体の定義方程式系を具体的に与へたのは今回が最初である.
③ Recursion により, 実際に沢山の項が得られることを確認できたことから, 様々な実験が可能となつた.
④ 上記 ⑥ に挙げた σ 函数の高次導函数の vanishing の性質については, 中屋敷氏と頼氏との共著論文でこの仮説は証明された. しかし, それは [論 6] の方法とは異る.

(3) 今後の展望

① Coble の超曲面は階数 2 の半安定 vector 束の同型類の moduli 空間の実現であるので, vector 束の理論の具体的な計算に応用が見出される筈である.
② $(2,3)$ 曲線で与へた新加法公式を他の曲線 (例へば $(3,4)$ 曲線) にも拡張すること.
③ sigma 函数の Hurwitz 整性について, 分母に 2 の現れる規則を定式化してそれを証明すること.

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(計 7 件)

[論 1] 大西 良博: Explicit realization of Coble's hypersurfaces in terms of multivariate $\wp$-functions,
第 17 回 早稲田大学整数論研究集会 報告集, 16 pp., 2013 年, 査読無

[論 2] J. Gibbons, S. Matsutani and Y. Ônishi: Relationship between the prime form and the sigma function for some cyclic (r,s) curves, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46:17 (2013)
DOI:10.1088/1751-8113/46/17/175203 査読有

[論 3] M. England, J.C. Eilbeck and Y. Ônishi: Some new addition formulae for Weierstrass elliptic functions.
http://arxiv.org/abs/1207.6274
(2012) 査読無

[論 4] Y. Ônishi: Generalized Bernoulli-Hurwitz numbers and the universal Bernoulli numbers. Russian Mathematical Surveys, 66:5 (2011) 871-932, 査読有,
DOI:10.1070/RM2011v066n05ABEH004763

[論 5] M. England, J.C. Eilbeck and Y. Ônishi: Abelian Functions associated with genus three algebraic curves.
London Math. Soc. Jour. of Computation and Math., 14(2011)291-326, 査読有,
DOI: http://dx.doi.org/10.1112/S1461157010000355

[論 6] Y. Ônishi: Determinant formulae in Abelian functions for a general trigonal curve of degree five.
Computational Methods and Function Theory, 11:2(2011)547-574
(special volume: *"Constructive methods for compact Riemann surfaces in applications"*), 査読有,
http://www.heldermann.de/CMF/CMF11/CMF112/cmf11031.htm

[論 7] J.C. Eilbeck, S. Matsutani and Y. Ônishi: Addition formulae for Abelian functions associated with specialized curves. Phil.Trans. Royal Society A, 369(2011) 1245-1263, 査読有, DOI: 10.1098/rsta.2010.0320

【学会発表】(計 4 件)

[発 1] 大西 良博: "Explicit realization of Coble's Hypersurfaces in Terms of Multivariate $\wp$-Functions", 2013 年 3 月 17 日, 早稲田大学 第 17 回 整数論研究集会 (早稲田大学数理科学研究所), 於 早稲田大学 西早稲田キャンパス

[発 2] 大西良博: "高い種数の代数関数体に対する一般化された Bernoulli-Hurwitz 数と, 関連する諸問題" (概説) 2011 年 11 月 19 日, 保型形式の整数論月例セミナー, 東京大学 数理科学研究科

[発 3] Y.Ônishi: "Frobenius-Stickelberger-type formulae for general curves", *Work shop on "The higher-genus sigma function and applications"*, ICMS at Edinburgh, U.K., 11, Oct. 2010, `http://icms.org.uk/workshops/sigma`

[発 4] 大西良博: "Hurwitz integrality of power series expansion of the sigma function in genus two", 2010 年 7 月 2 日, 早稲田整数論セミナー, 2013 年度 第 10 回, 於 早稲田大学 西早稲田キャンパス

【図書】(計 1 件)

[図 1] 大西良博 : Abel 函数論, 中央大学数学教室講究録 第 6 巻, 139 pp, (印刷中) (2008 年の中央大学での講義に基く), 中央大学数学教室

【その他】(計 4 件)　ホームページ等

[他 1] 成果の一部を公表してゐる Web page: `http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/#publications` (maintained by Y. Ônishi)

[他 2] "*International Conference on Jacobian varieties, Abelian functions, and Kummer surfaces*", University of Yamanashi; 30-31, March, 2012, organized by Y. Ônishi `http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/research/conferences/2012_kofu.html`)

[他 3] Y. Ônishi : "The main congruences on generalized Bernoulli-Hurwitz numbers for the curves of cyclotomic type", 26 Aug., 2011

[他 4] Y. Ônishi : "The sigma function of a general curve of genus two", 7, June 2012 `http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/research/pub/sigma_genus2.html`

6. 研究組織

(1) 研究代表者
大西 良博 (ÔNISHI YOSHIHIRO)
山梨大学・教育学研究科・教授
研究者番号：60250643

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし