

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 5 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540007

研究課題名（和文）

散在型有限単純群の分解行列の解析

研究課題名（英文）

Analysis of decomposition matrices for sporadic finite simple groups

研究代表者

脇 克志 (WAKI KATSUSHI)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：30250591

研究成果の概要（和文）：

本研究の主なる研究対象である散在型有限単純群  $J_4$  の Full defect のブロックについて分解行列を計算する上で、 $J_4$  とその極大部分群の指標的な計算だけでは、不十分であることが明らかになった。 $J_4$  の通常表現の構成方法を応用して、代数解析ソフトウェア GAP 上で  $J_4$  の 2 つの極大部分群の表現から Amagamation を利用して標数 3 の体上で  $J_4$  の具体的なモジュラー表現を構成する方法を求めた。また、 $J_4$  の 1333 次元の既約加群が、 $p=3$  において Trivial Source 加群であることを証明した。

研究成果の概要（英文）：

It has been clear that the calculations of characters in the sporadic finite simple group  $J_4$  which is the main object in this project and its maximal subgroup are not enough for the decision of decomposition matrix of the full defect blocks in  $J_4$ . We found the concrete way of the construction of modular representations over a field of characteristic 3 by the algebra analysis system GAP using the Amagamation from two representations of maximal subgroups of  $J_4$ . This construction is deduced from the construction of the ordinary representation of  $J_4$ . We also proved the irreducible  $p$ -module of dimension 1333 of  $J_4$  is trivial source module in case that  $p=3$ .

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000円	270,000円	1,170,000円
2011年度	700,000円	210,000円	910,000円
2012年度	1,500,000円	450,000円	1,950,000円
総計	3,100,000円	930,000円	4,030,000円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限群論、モジュラー表現、散在型単純群

1. 研究開始当初の背景

(1) 散在型有限単純群の分解行列の決定

26個の散在型有限単純群について、現在18個の単純群で全ての素数  $p$  に対

する分解行列が決定している。しかし、未解決で残っている単純群  $Ly$ ,  $Th$ ,  $F_{23}$ ,  $Co_1$ ,  $J_4$ ,  $Fi'_{24}$ ,  $B$ ,  $M$  は、群自身の位数や極大部分群との指数が非常に大きく、部

分群からの単純な誘導表現や、テンサー積の情報だけでは分解行列を得る事が不可能である。 $p = 2$  については、J. Thackray により、Ly, Th, Co1, J4 の解析が進められている。奇素数の場合では、Th について、G. Hiss, J. Meuller, Co1 について、F. Noeske、そして F23 や Fi'24 については、C. Jansen が計算機を用いた具体的な表現の構成により、部分的な分解行列の解析に成功している。このとき、モジュラー表現の次元を小さくする手法として、群環  $kG$  の中等元を用いて  $k$  上の異なる環上の次元の小さいモジュラー表現に変換する事で、表現の解析が行われるが、どの様な中等元を選ぶかは、今までの経験や試行錯誤に頼る部分が多い。具体的な表現の構成を行わず計算機を用いた射影指標の構成を使う手法では、研究代表者により、 $p = 3$  の場合で、ヤンコー群 J4 の分解行列の部分的な決定が行われた。26 番目に発見された J4 は、散在型の中でも特に他の有限群との関わりが見いだせない例外的な単純群として知られている。

(2) **Broue 予想と分解行列**

有限群のモジュラー表現論では、1990 年に示された Broue 予想が未解決な最も重要な問題と考えられている。ブロックに付随して、不足群と呼ばれる  $p$ -群  $D$  が定義されるが、Broue 予想とは、可換な不足群  $D$  を持つ  $G$  と  $N_G(D)$  のブロックの表現が作る圏が導来同値となるという予想である。本来、Broue 予想の確認は、分解行列などモジュラー表現の基本的な情報がそろっている事を前提に行われてきているが、越谷・功刀の論文に見られるように、分解行列が完全に決定する前に Broue 予想の確認過程で得られる  $G$  の直既約表現の Green 対応から未確定な分解行列の決定に利用できる情報が得られている。

(3) **ヤンコー群 J4 の分解行列について**

J4 については、研究代表者により、すべての奇素数に対する極大部分群の分解行列と  $p = 3$  に関する J4 の分解行列の部分的な結果がすでに論文となっている。また、分担者の功刀による論文により、 $p = 3$  における Broue 予想の確認が行われている。 $p = 11$  に対しても、研究代表者により一般分解行列が決められている。

2. 研究の目的

(1)  **$p=3$  に対する J4 の分解行列を確定**

$p=3$  の場合について、その極大部分群での情報はすべて確定している。また、J4 の主ブロック以外の分解行列がいくつ

かのパラメータを除き確定している。Broue 予想の確認が終わっているため、J4 の直既約モジュラー表現と Green 対応する局所部分群の直既約モジュラー表現の構造も一部計算が可能であり、これらの情報を元に J4 の直既約射影表現の構造を解明する事で、 $p=3$  に対する分解行列の確定を目指す。

(2) **MOC system の改良・実装**

Meataxe や MOC system に代表される既約モジュラー表現や既約 Brauer 指標を構成・解析プログラムを利用して、J4 の既約 Brauer 指標の構成を行う。特に、GAP 上で開発が続けられている MOC system を改良して、通常既約指標を既約 Brauer 指標に分解する機能を追加する。これらは、本研究の目的である J4 だけでなく今後分解行列を解析する他の有限単純群に対しても活用できるように、利用方法や利用事例を付けたドキュメントの作成を行い、プログラムと一緒に広く公開する。

(3)  **$p=11$  に対する J4 の分解行列を確定**

$p=11$  の場合も、その極大部分群での情報はすべて確定している。まずは、 $p=3$  の場合と同様に計算機による射影指標の計算を利用して、分解行列の解析を進める。更に、J4 の Sylow 11-部分群が Trivial intersection であるため、局所部分群のコホモロジー環の構造は、J4 のコホモロジー環と一致することが知られている。このコホモロジー環の情報を分解行列の決定に利用する。

(4) **モジュラー表現の国際研究集会の開催**

散在型有限単純群の分解行列は、部分的な情報が Web 上に公開されているものの、詳細な計算方法や厳密な証明などは、論文として公開されていないものも多い。国際研究集会を開催する事で、散在型有限単純群の分解行列についての情報を集約することは、今までまったく手を付けられていない残された問題に対応する上で不可欠である。この研究集会で得られた研究成果をまとめ、散在型有限単純群の分解行列についての現状と今後期待される発展の方向を報告集としてまとめ、広く公開する事は分解行列を使った Broue 予想等の検証のためにも、重要な作業と考える。

3. 研究の方法

(1) **計算機を用いた具体的な表現構成**

計算機を用いた具体的なモジュラー表現の構成は、ドイツのアーヘン大学を中心に、散在型有限単純群の分解行列の決定で多くの結果

(<http://www.math.rwth-aachen.de/~MOC/>)

を与えている。研究代表者が行った  $J_4$  の分解行列の解析でも、計算機による射影指標の計算が大きな役割を演じていた。また、群の一般化とも考えられるアソシエーション・スキームでは、分担者の花木を中心に、アソシエーション・スキームのモジュラー表現が定義され、その分解行列の議論も行われている。更に、アソシエーション・スキームは、群環よりも次元の小さい Hecke 環を典型的な例として含む。この Hecke 環の表現を通して元の群の表現に関する情報を得る手法が、O. Michler, G. Hissらによって示された。これにより、アソシエーション・スキームの分解行列から群環の分解行列を得る道も開かれた。

(2) **p-部分群の融合構造の利用**

コホモロジー環  $H^*(G, k)$  は、有限群  $G$  の  $p$ -部分群の融合構造から決まることが 1950 年代から知られていたが、1990 年の Mislin の定理で、その逆も証明されている。更に 2007 年には、分担者の飛田により Mackey 関手を用いることで、両者の対応が具体的に構成出来る事が示された。この  $p$ -部分群の融合構造は、局所部分群との関係を解析する上でも重要な情報となり、Mackey 関手がモジュラー表現において、局所的な構造と全体構造関連づける上で有用な手段となることが期待できる。

(3) **導来同値を用いた圏論的な議論**

有限群  $G$  とその局所部分群  $H$  との間で、Broue 予想の確認を行うときは、 $G$  の既約モジュラー表現と対応する  $H$  の直既約な表現を構成し、この対応から導来同値を導いてきた。この場合、分解行列などモジュラー表現の基本的な情報が不可欠となる。ところが、分担者の功刀の論文では圏論的な議論を通して、導来同値を導き、そこから  $G$  の既約モジュラー表現の Green 対応となる  $H$  の直既約な表現を得ている。これより、導来同値を用いた圏論的な議論から分解行列の確定に利用できる情報が得られる可能性がある。

4. 研究成果

- (1)  $J_4$  の通常表現の構成方法を応用して、代数解析ソフトウェア GAP 上で  $J_4$  の 2 つの極大部分群の表現から Amagamation を利用して標数 3 の体上で  $J_4$  の具体的なモジュラー表現を構成する方法を求めた。
- (2)  $J_4$  の 1333 次元の既約加群が、 $p=3$  において Trivial Source 加群であることを証明した。
- (3) 2012 年 8 月 31 日から 9 月 2 日にかけて

静岡県浜名湖において、研究代表者が主催した国際的な研究集会が開催した。この研究集会では、越谷重夫氏、奥山哲郎氏、渡辺アツミ氏などの有限群のモジュラー表現に関連する国内の研究者および海外でモジュラー表現論における最新の結果を発表している Karin Erdmann 氏(オックスフォード大学)、Burkhard Külshammer 氏(イェーナ大学)、John Murray 氏(アイルランド国立大学)を招請して、相互の情報交換から最終的な分解行列決定に必要な情報が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① A. Hanaki, Clifford type theorems for association schemes and their algebraic fusions, J. Algebra, 査読有、363 巻、2012、1-7
- ② M. Ozeki, K. Waki, Complete Coset Weight Distributions of Second Order Reed-Muller Code of Length 64, Journal of Math-for-industry, 査読有、3 (2011A-1)、2011、1 - 20
- ③ R. Kessar, N. Kunugi, N. Mitsuhashi, On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules, J. Algebra, 査読有、340(1)、2011 年、90-103、  
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2011.04.029
- ④ A. Hanaki, K. Kim, Y. Maekawa, Terwilliger algebras of direct and wreath products of association schemes, J. Algebra, 査読有、343 (1)、2011 年、195-200  
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2011.05.035
- ⑤ A. Hanaki, Faithful representations of association schemes, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有、139 (9)、2011 年、3191-3193、  
DOI : 10.1090/S0002-9939-2011-11026-8
- ⑥ S. Koshitani, N. Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, Mathematische Zeitschrift, 査読有、265 巻、2010 年、161-172
- ⑦ A. Hanaki, A category of association schemes, J. Combin. Theory Ser. A., 査読有、117 巻、2010 年、1207-1217
- ⑧ 奥山哲郎, 佐々木洋城, 飛田明彦, 有限群のコホモロジー論、数学、査読有、62 巻、2010 年、240-266
- ⑨ A. Hida and H. Miyachi, Module

correspondences in Rouquier blocks of finite general linear groups in: Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Progress in Math., 査読有、284 巻、2010 年、81-92

〔学会発表〕(計 10 件)

- ① 飛田明彦、Extraspecial  $p$ -群のコホモロジーへの両側 Burnside 環の作用について、日本数学会年会、2013 年 3 月 22 日、京都大学
- ② 飛田明彦、Cohomology of the extraspecial  $p$ -group and representations of the double Burnside algebra、有限群とその表現・頂点作用素代数・代数的組合せ論の研究、2013 年 1 月 9 日、京都大学数理解析研究所
- ③ 花木章秀、アソシエーションスキームの表現入門、第 5 回若手会セミナー、2013 年 3 月 16 日、大阪大学
- ④ 花木章秀、Quasi-permutation characters of special  $p$ -groups、第 24 回有限群論草津セミナー、2012 年 7 月 28 日、草津セミナーハウス (群馬県)
- ⑤ 脇克志、 $J_4$  の表現構成について、代数学と計算、2011 年 11 月 8 日、首都大学東京
- ⑥ 功刀直子、Fusion system とスコット加群の Brauer 直既約性、有限群のコホモロジー論とその周辺、2011 年 8 月 29 日、京都大学数理解析研究所
- ⑦ 飛田明彦、有限群の両側 Burnside 環の表現論、有限群のコホモロジー論とその周辺、2011 年 8 月 30 日、京都大学数理解析研究所
- ⑧ 花木章秀、Clifford theory for algebraic fusions of association schemes、第 23 回有限群論草津セミナー、2011 年 7 月 30 日、草津セミナーハウス (群馬県)
- ⑨ 脇克志、 $J_4$  のモジュラー表現構成、お茶大表現論セミナー、2010 年 12 月 26 日、東京理科大学神楽坂キャンパス
- ⑩ 脇克志、 $J_4$  のモジュラー表現構成、第 22 回有限群論草津セミナー、2010 年 8 月 2 日、草津セミナーハウス (群馬県)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

脇 克志 ( WAKI KATSUSHI )  
山形大学・理学部・教授  
研究者番号：30250591

### (2) 研究分担者

飛田 明彦 ( HIDA AKIHIKO )  
埼玉大学・教育学部・准教授  
研究者番号：50272274

花木 章秀 ( HANAKI AKIHIDE )  
信州大学・理学部・教授  
研究者番号：50262647

功刀 直子 ( KUNUGI NAOKO )  
東京理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：50362306