

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：12102
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540008
 研究課題名（和文） 混合楕円モチーフの研究
 研究課題名（英文） Study of the mixed elliptic motives

研究代表者
 木村 健一郎 (KIMURA KENICHIRO)
 筑波大学・数理物質系・講師
 研究者番号：50292496

研究成果の概要（和文）：Bloch と Kriz による、混合 Tate モチーフの圏に対応するホップ代数の構成を一般化して、楕円曲線で生成される混合モチーフの圏、すなわち混合楕円モチーフの圏に対応するホップ代数を構成した。方法は、楕円曲線とアフィン空間の直積上の代数的サイクルから次数付き微分代数(DGA)を構成し、そこから bar 構成によりホップ代数を構成した。楕円ポリログに対するモチーフも存在する。また、Hodge 実現関手の構成の準備として、混合 Tate モチーフの圏の Hodge 実現関手の再構成を行った。

研究成果の概要（英文）：Generalizing the Bloch-Kriz construction of mixed Tate motives, We constructed a Hopf algebra which should be the Galois group of the category of the Mixed elliptic motives. The method is by the bar construction of a differential graded algebra constructed from algebraic cycles on the products of an elliptic curve and affine spaces. The motive of the elliptic polylogarithm exists in our category.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
 科研費の分科・細目：数学・代数学
 キーワード：数論幾何学

1. 研究開始当初の背景 混合モチーフの圏は、「普遍的なコホモロジーのなす圏」と呼ぶべき圏で、Grothendieck により存在が予想された。基礎体 k を止めると、 k 上の代数多様体の圏から k 上の混合モチーフの圏へ反変

関手があり、あらゆるコホモロジー理論はこの関手を経由するべきである。混合モチーフの圏からコホモロジー理論への関手を実現化関手という。Grothendieck は更に、混合モチーフの圏は淡中圏、つまりある代数群の表現の圏である

と予想した。混合モチーフの圏の構成は重要な問題であるがなかなか難しく、現在までに決定版と言えるものはまだ定義されていない。花村、Levine, Voevodsky は混合モチーフの導来圏にあたるものを独立に構成した。彼らの圏は皆同値であることがわかっている。特に Voevodsky は彼の圏を使って Bloch-Kato 予想というガロア・コホモロジーについての 予想の特別な場合を証明した。花村は、代数 多様体に関する標準 予想 と、代数的 K 理論についての Beilinson-Soule 予想が正しければ彼の定義した圏に t -構造が入り、混合モチーフの圏がその核として取り出せることを示した。

一方、より直接に混合モチーフの圏を構成する試みもある。Bloch と Kriz は混合 Tate モチーフという混合モチーフの 部分圏に対応する代数群を構成した(参考文献(1))。その基本的なアイデアは次のようなものである。モチーフの圏では、既約な 対象の間の拡大の群は代数的 K 群で記述される。モチーフの圏が代数群の表現の圏だとすると、既約な表現の間の拡大は Lie 環のコホモロジーとして記述 される。よって Lie 環のコホモロジーとして 代数的 K 群が現れるような代数群を構成したい。Bloch は代数多様体の高次 Chow 群というものを定義した。これは代数的サイクルから 定義されるある複体のコホモロジー群で、有理数係数では代数的 K 群に一致する。Bloch と Kriz はこの代数的サイクルの 複体から次数付き微分代数 (differential graded algebra, DGA) を構成し、それから bar 構成によりある可換な Hopf 代数を定義した。この Hopf 代数を関数環とする代数群の Lie 環は、元になる DGA がある 条件を満たし、かつ代数的 K 理論における Beilinson-Soule 予想が成り立つ時、元の DGA と同じコホモロジー群を持つ。混合 Tate モチーフの圏は、この代数群の表現の圏、言い換えればこの Hopf 代数上の余加群の圏 と定義される。彼らの定義した圏は混合 Tate モチーフの有力な候補である。彼らは更にこの圏から Hodge 構造の圏と 1-進ガロア表現 の圏へのエタール実現化関手も定義した。また、混合 Tate モチーフの重要な例である、多重 Log 関数に対応する余加群を代数的サイクルを使って定義し、その Hodge 実現を計算した。そして実際に多重 Log 関数が Hodge 実現の周期として現れることを示した。

2. 研究の目的

混合楕円モチーフの圏の構成。Bloch と Kriz は Tate 加群という 1 次元のモチーフで生成される混合 Tate モチーフの圏を構成した。我々は楕円曲線 E を一つ取り、 E で生成される混合モチーフの圏を構成する。そして Hodge, エタールの実現化関手を定義する。これは Bloch により示唆された研究の方向であるが、まとまった研究結果は出ていない。しかし我々は寺杣友秀氏との共同研究により DGA の構成および相対 bar 構成による Hopf 代数の構成が可能であるという感触を得た。更に、混合 Tate モチーフの場合の多重 Log モチーフの楕円曲線版である楕円多重 Log モチーフに対応する対象を構成し、その Hodge 実現、エタール実現の計算を行う。また、最近 multiple 多重 log に対するモチーフの構成がなされ、multiple 楕円多重 Log の研究も始まっている。これに対応する対象の構成も行う。代数体のゼータ関数の値が多重 Log 関数で表わされるという Zagier 予想の楕円版(楕円曲線のゼータ関数の値は楕円多重 Log を使って表わされる)への応用について研究する。また、我々の圏から花村、Levine, Voevodsky の圏への関手を定義し、その性質を調べる。その関手は 忠実充満になるはずである。

3. 研究の方法

楕円曲線 E を固定し、 E で生成される混合モチーフの圏を構成する。既約な対象は E のコホモロジーからテンソル積により得られる。その間の拡大の群は代数的 K 群(=高次 Chow 群)により記述されるべきである。それをコホモロジーに持つ DGA は、 E の積上の代数的サイクルから構成される。混合 Tate モチーフの場合と違い、積は DGA 全体では定義できず、それと quasi-isomorphic な部分環上で定義される。その為構成できる代数は、擬 DGA というものになる。bar 構成も、pure な楕円モチーフの圏のガロア群である GL_2 上の相対的なものになる。また、bar 構成したものを環にするには shuffle 積を用いる。混合 Tate モチーフの場合と違いここでも次元が上がることによる困難は有り得る。それは技術的なものであり本質的なものではないため、克服することは可能である。混合楕円モチーフの圏は、そのように定義された Hopf 代数上の余加群の圏と定義される。Hodge 実現とエタール実現の関手について、Hodge 実現を例にとる。

Bloch-Kriz では、Hodge 構造のガロア群の関数環の元を、枠付き Hodge 構造の同値類としてとらえ、彼らが構成した Hopf 代数の各元に枠付き混合 Tate Hodge 構造を対応させている。これは複雑で難解であり、混合楕円モチーフにそのまま適用することは難しい。より直接に、我々が構成する Hopf 代数に、Hopf 代数の構造と両立する混合 Hodge 構造を入れることで混合 Hodge 構造のガロア群の関数環である Hopf 代数からの環準同型を得る。エタール実現も同様である。混合 Tate モチーフと違い、Hopf 代数が遥かに複雑になるので技術的な困難は予想されるが、寺杉友秀氏の協力を得て実現関手の定義をする。

楕円多重 Log のモチーフについて。楕円多重 Log のモチーフは Beilinson と Levin により、多重 Log のモチーフの類似として定義された(参考文献(2))。我々の圏にもこれに対応する余加群があるはずである。Bloch は彼らの混合 Tate モチーフの圏に多重 Log に対応する余加群を構成している。代数的サイクルを使っているが、その定義は天下りのであり、アイデアの出所は不明である。楕円多重 Log の余加群を同じように定義することは難しい。まずは Bloch の構成をより概念的に理解すべきである。Beilinson と Levin の論文で楕円多重 Log のモチーフ的な定義を一つ与えているので、これと Bloch の構成をヒントに我々の圏に余加群を構成できるはずである。シカゴの Bloch 氏および寺杉友秀氏と共同でこれを行う。また、楕円多重 Log の Hodge 実現の計算を行う。Bloch と Kriz の論文では多重 Log のモチーフの Hodge 実現を計算している。

これには最初の定義とは別の Hodge 実現の定義を使っている。より計算に適した定義ではあるが、最初の定義と同じであることが明確に証明されていない。まずこれをきちんと証明することから始める。これにより楕円モチーフでも Hodge 実現を同様の計算に向けた形で定義できるはずである。

4. 研究成果 寺杉氏との共同研究により、混合楕円モチーフに対応すべき DGA を構成することができた。それはプレプリントとしてまとめた。また、Hodge 実現関手の構成のため、Bloch-Kriz の混合 Tate モチーフの Hodge 実現関手を再構成する必要があり、花村氏、寺杉氏と共同で基本的な部分の構成を終えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① K. Kimura, S. Kimura, N. Takahashi, Motivic zeta functions in additive monoidal categories, Journal of K-theory 9 (2012), 459-473, 査読有
<http://dx.doi.org/10.1017/is011011006jkt174>

② K. Kimura, A Remark on the Second Abel-Jacobi map, Cycles, Motives and Shimura varieties (2010), 217-226, 査読有

[学会発表] (計 4 件)

① 木村健一郎, Hodge realization of mixed Tate motives、ホップ代数と量子群-応用の可能性、2012 年 9 月 4 日、京都大学

② 木村健一郎, Hodge realization of mixed Tate motives via period integral、代数幾何とモチーフ理論ワークショップ、2012 年 3 月 8 日東北大学

③ 木村健一郎, Hodge realization of mixed Tate motives via period integral, 玉原特殊多様体研究集会、2011 年 9 月 6 日、東京大学玉原セミナーハウス

④ K. Kimura, Mixed Elliptic Motives, NUMBER THEORY, GEOMETRY AND PHYSICS AT THE CROSSROADS, 2010 年 8 月 8 日、津田塾大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 健一郎 (KIMURA KENICHIRO)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：50292496