

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540011

研究課題名(和文)アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化とlog幾何

研究課題名(英文)Compactifications of moduli spaces of abelian varieties and log geometry

研究代表者

中山 能力(Nakayama, Chikara)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：70272664

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を、log幾何を用い、logアーベル多様体のモジュライ空間として構成するために必要とされる諸理論を構築した。具体的には、logアーベル多様体の固有模型の理論を確立した。特に固有模型の存在を証明した。またlogアーベル多様体上のtorsor及びlog torsorを組織的に解析し、それと固有模型の存在を用いて、logアーベル多様体の射影模型の理論を確立した。特に射影模型の存在をほぼ証明した。完備離散付値環上のlogアーベル多様体の全体像を把握する理論を構築した。Logアーベル多様体上の代数幾何と形式幾何との対応について調べた。

研究成果の概要(英文)：We established various theories which are necessary to construct compactifications of moduli spaces of abelian varieties by log geometry as moduli spaces of log abelian varieties. For example, the theory of proper models for log abelian varieties; in particular, we proved that a proper model always exists. We systematically analyzed torsors and log torsors on a log abelian variety, by which together with the existence of proper models we had a theory of projective models for log abelian varieties. In particular, we almost proved the existence of projective models. We obtained a whole picture of log abelian varieties over a trait. We studied the comparison of algebraic geometry and formal geometry over a log abelian variety.

研究分野：数論幾何

キーワード：アーベル多様体 トロイダル・コンパクト化 対数幾何 対数的アーベル多様体

1. 研究開始当初の背景

(1) アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化には長い歴史があり、マンフォードらによるトロイダル・コンパクト化や佐武コンパクト化など、多くのコンパクト化が構成され、研究されて来ている。

(2) Log アーベル多様体の理論は (1) で述べたような種々のコンパクト化に統一かつモジュライ的な意味づけを与えることができるものとされ、アーベル多様体の退化に関連する諸分野に应用を持つ可能性のある理論として注目されていた。

(3) 研究開始当初において、複素数体上の解析理論は、log ホッジ理論との関係も含めて、すでに確立され、出版されていた (文献: Logarithmic abelian varieties, Part I: Complex analytic theory, T. Kajiwar, K. Kato, and C. Nakayama, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo 15 (2008), pp.69—193) が、代数理論は未完成であり、いくつかの国の研究者からは、応用のために、文献についての問い合わせが来始めていた。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を、log アーベル多様体のモジュライ空間として構成することであった。より正確には、トロイダル・コンパクト化に自然な log 構造を与えたものが、log アーベル多様体の fine moduli であることを証明することであった。

(2) (1) の目的を達成するには、log アーベル多様体について、通常のアーベル多様体と同程度の深い知見が必要となる。具体的には、log アーベル多様体の模型の理論、特に、固有模型や射影模型の理論、完備離散付値環上の log アーベル多様体の理論、log アーベル多様体上の torsor 及び log torsor の理論、代数幾何と形式幾何との対応理論などを、構築することが必要となり、これらも本研究の目的であった。

3. 研究の方法

本研究の方法は、研究者間の情報交換、意見交換、議論が主体であった。特に、漠然とした萌芽段階での構想や、新しい構想に対する微妙な印象などを伝えるには、メールによる連絡はきめ細かさ欠けるので、直接議論することが不可欠であった。国内の研究者とは、定期的に研究打ち合わせを行ない、海外の研究者とは、随時、集中的に研究打ち合わせを行なった。

4. 研究成果

(1) 最終的な目標である、アーベル多様体のモジュライ空間の log アーベル多様体によ

るコンパクト化を、1次元のアーベル多様体、すなわち楕円曲線の場合に実現した。その過程で、モジュライ関手の局所有限性を、模型の詳しい理論の1次元の場合を用いて証明した。この成果は、梶原健氏、加藤和也氏との共著論文 ([雑誌論文]) にまとめた。この中で、従来の Deligne-Mumford コンパクト化との比較及び、従来の普遍一般楕円曲線と log 楕円曲線の普遍族との比較も行なった。また Drinfeld 型レベル構造など様々なレベル構造についても論じた。この論文は、本研究の全体像を1次元の場合に例示したものと見做すこともできる。

(2) Log アーベル多様体の固有模型の理論を確立した。

この理論の中心的な結果は、固有模型の存在である。その証明は、任意の扇に対する表現可能模型の存在を示してから、すでに存在が証明されている完備扇に対する模型に valuative criterion を適用して、その模型の固有性を確かめることによって、達成された。

このうち表現可能模型の存在は、任意の基空間上の log アーベル多様体が \mathbb{Z} 上有限生成な基空間上に降下すること、すなわち、モジュライ関手の局所有限性から導くことができるが、降下を示すためには、逆に表現可能模型の存在が必要となり、実際には、表現可能模型の存在と降下とを少しずつ同時に証明していくこととなった。この過程で ket site を用い、さらに toric stack から通常の概型への射が定数になることなど、様々な道具を組み合わせた議論を重ねた。

一方、valuative criterion を適用するためには、完備離散付値環上の log アーベル多様体の全体像の把握が必要であるが、これは、Raynaud 理論や rigid 幾何を用いることで、固有模型の構成に必要な部分については解決できた。さらに一般の場合については (4) で述べる。

以上の成果は、梶原健氏、加藤和也氏との共著論文 ([雑誌論文]) にまとめた。

(3) Log アーベル多様体の射影模型の理論をほぼ確立した。射影模型を構成するには、(2) で存在が示されている固有模型上にトーサー (G_m トーサー) を構成する必要があった。そのために log アーベル多様体上のトーサー、さらに、log トーサーについての組織的な分析を行なった。例えば log アーベル多様体上の cubic 同型定理を証明した。また、Log アーベル多様体上のトーサーの集合が順極限と可換であるという命題の証明が困難であったが、詳細な検討の結果、基空間のネーター性を仮定すれば、cubic 同型を用いた議論により、log アーベル多様体の G_m 拡大に関する

同種の命題に帰着するであろうことがわかった。基空間のネーター性を仮定していても、最終的な応用に関しては問題ないと考えられ、現在確認中である。以上の成果をまとめた、梶原健氏、加藤和也氏との共著論文を執筆中である。

(4) Log アーベル多様体の形式モジュライ空間と GAGF (代数幾何と形式幾何との対応) についての研究を進め、梶原健氏、加藤和也氏との共著論文を準備した。これは[雑誌論文] で懸案となっていた、完備離散付値環上の log アーベル多様体の全体像の完全な記述をも含んでいる。

(5) 最終目標であった、log アーベル多様体のモジュライ空間の構成を主定理とする共著論文を準備した。これは、一連の共著論文のまとめとなる論文である。この中では、log アーベル多様体のモジュライ空間の表現可能性を示すために、古典的な Artin criterion を用い、(2) や (3) における模型についての結果などを組み合わせ、Artin criterion の各条件を確かめる方針を採用した。

(6) Log アーベル多様体の理論および当研究全般に関する講演を、京都大学数理解析研究所で開催された研究会「代数的整数論とその周辺 2014」で行ない、多くの質問や今後の展望についてのコメントなどの反響があった([学会発表])。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計12件)

Logarithmic abelian varieties, Part IV: Proper models, T. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Nagoya Mathematical Journal, 掲載決定(2015 刊行予定), 査読有.

Log Neron models over surfaces, II, C. Nakayama, Hokkaido Mathematical Journal 44, 掲載決定(2015 刊行予定), 査読有.

Neron models for admissible normal functions, K. Kato, C. Nakayama, and S. Usui, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 90 (1) (2014), pp. 6—10, 査読有.

Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits, K. Kato, C. Nakayama, and S. Usui, Journal of Algebraic Geometry 22 (4) (2013), pp. 671—772, 査読有.

Logarithmic abelian varieties, Part III: Logarithmic elliptic curves and modular curve, T. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Nagoya Mathematical Journal 210 (2013), pp. 59—81, 査読有.

Log Neron models over surfaces, C. Nakayama, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo 19 (2012), pp. 613—659, 査読有.

Analyticity of the closures of some Hodge theoretic subspaces, K. Kato, C. Nakayama, and S. Usui, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 87 (9) (2011), pp. 167—172, 査読有.

[学会発表](計9件)

Log abelian varieties (Survey), C. Nakayama, RIMS Workshop Algebraic Number Theory and Related Topics (研究会「代数的整数論とその周辺 2014」), 2014.12.1, 京都大学(京都府・京都市)

Degeneration of normal functions and log mixed Hodge theory, C. Nakayama, 第58回代数学シンポジウム, 2013.8.28, 広島大学(広島県・東広島市).

Geometric log Hodge structures on the standard log point, I, C. Nakayama, ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」, 2013.8.5, 東京電機大学東京千住キャンパス(東京都・足立区).

Degenerate fibers and log geometry, C. Nakayama, 研究会 Branched coverings, degenerations, and related topics, 2013.3.9, 首都大学東京(東京都・八王子市).

Log Neron models over surfaces, C. Nakayama, ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」, 2012.8.2, 東京電機大学東京千住キャンパス(東京都・足立区).

A fiber bundle property of proper log smooth maps, C. Nakayama, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 2012.1.25, 東北大学(宮城県・仙台市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中山 能力 (NAKAYAMA, Chikara)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授
研究者番号：70272664