様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：３３９１９
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４００１５

研究課題名（和文）有限次元代数の組み合わせ論と量子対称性

研究課題名（英文）Combinatorics of finite-dimensional algebras and quantum symmetry

研究代表者
前野　俊昭（Maeno, Toshiaki）

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：６０２９１４２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、主に以下の二テーマに関する結果を得た。
1．シューベルト・カルキュラスとその一般化に対し、ワイル群上の非可換微分構造を用いた記述を与えた。中心的な対象としたのは、旗多様体のK環とアフィン・グラスマニアンのホモロジーであり、これらを対応するワイル群に付随したニコルス・ウォロノヴィッツ代数の部分代数として記述した。
2．有限次元ゴレンシュタイン代数のレフシェッツ性に関する諸結果を得た。(H_4除く）有限コクセター群の余不変式代数のレフシェッツ元を決定した他、マトロイドから定まる新しいゴレンシュタイン代数を導入し、幾何的モジュラー束に対応する場合にそのレフシェッツ性を証明した。

研究成果の概要（英文）：In this project, we have obtained the results mainly on the following two themes.
(1) We have given a description of the Schubert calculus and its generalizations in terms of noncommutative differential structures on the Weyl groups. The main topics are the K-ring of the flag variety and the homology of the affine Grassmannian. We have described them as subalgebras of the Nichols-Woronowicz algebras associated with the corresponding Weyl groups.
(2) We have obtained some results on the Lefschetz property of finite-dimensional Gorenstein algebras. We have determined the set of the Lefschetz elements of the coinvariant algebra of the finite Coxeter groups (except H_4). We have also introduced a new class of Gorenstein algebras defined by matroids and proved its Lefschetz property when the matroid corresponds to a geometric modular lattice.

研究分野：代数学

キーワード：代数的組合せ論　Hopf代数　鏡映群　旗多様体　Lefschetz性

１．研究開始当初の背景

シューベルト・カルキュラス及びその量子化に対する非可換代数的なアプローチは、これまで研究代表者の主要な研究テーマであったが、その研究において非可換ホップ代数の対称性がシューベルト・カルキュラスの様々な変種も含め多くの構造を統制していることが明らかとなり、可積分系との興味深い接点も見出された。こうした現象は旗多様体のコホモロジー環のみならず、有限コクセター群あるいは複素鏡映群の余不変式代数に対しても観察され、より一般に体上の有限次元可換ゴレンシュタイン代数のクラスに属する代数に対しても期待された。

一方、次数付可換アルティン代数に対するレフシェッツ性の研究は、強レフシェッツ定理の環論的抽象化と言う意味で、アルティン環を多様体のコホモロジー環との類似で研究するものであり、組合せ的に興味深い様々な構造と関係することが知られていた。この方向に関しては、研究代表者自身の研究でゴレンシュタイン代数のレフシェッツ性の判定法に関する結果が得られており、有限コクセター群や複素鏡映群の余不変式代数への適用が検討されていた。

旗多様体のコホモロジー環においてはシューベルト・カルキュラスの枠組みとレフシェッツ性の概念は自然に結び付いており、ブリューア順序の組合せ論への応用も知られている。これらを雛形とし、より広く有限次元代数の組合せ的諸構造の量子対称性からの研究が興味深いものとして期待された。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、様々な有限次元代数に現れる組合せ構造の解析であり、特にそれらの構造の背後にある広い意味での対称性や幾何学的対象を探ることで統一的な理解を目指すことである。中心的な研究対象としては、有限次元代数の構造定数の記述、非可換シューベルト・カルキュラス、対称性を持つ代数とその量子変形、可積分系と対称多項式、多様体のコホモロジー環として得られるような有限次元代数とその一般化等であり、本研究はこれらを扱う統一的な視点として「有限次元代数の組み合わせ論」及び「量子対称性」というキーワードの下で構想されたものである。

この研究課題における二つのキーワード「組合せ論」と「量子対称性」は次のような意味で用いられている。ここでの「組合せ論」は有限集合に入る構造、あるいは離散構造の研究を指しており、対象としては半順序構造、ルート系、有限複体（有限グラフや多面体・扇など）、マトロイド、デザイン等が挙げられる。「量子対称性」という語は、ここでは群の対称性の一般化としての量子群の対称性、更により広く一般の (braided)ホップ代数の対称性を指している。

特に、研究代表者がこれまで研究してきた
(1) 旗多様体の量子コホモロジー環・量子 K 環や複素鏡映群の余不変式代数と可積分系・非可換微分構造との関係
(2) 有限次元ゴレンシュタイン代数のレフシェッツ性と半順序構造、量子群の表現への拡張
といったテーマのコンテクストをより広く捉え、ある種の対称性を持つ有限次元代数という枠組みの中で内在する組合せ構造の問題を考察する。

３．研究の方法

本研究では中心的な問題として、等質空間の（量子）コホモロジー環や鏡映群の余不変式代数の非可換微分構造を用いた記述を手掛かりに、一般コホモロジーへの拡張、カロジェロ型量子可積分系などに対する「シューベルト・カルキュラス」の構成を試みる。また、有限次元ゴレンシュタイン代数を「仮想的多様体のコホモロジー環」と見なす視点から、その組合せ的構造を探る。余不変式代数はゴレンシュタイン代数の一例であり、「仮想的旗多様体」に対応していると見なすことができる。従って、これらは相互に関係した問題である。特にホップ代数の対称性を手掛かりとすることで、これらの問題の研究を進める。

具体的な題材としては、「有限群の群環」、「等質空間・トーリック多様体・点付き安定曲線のモジュライ空間等のコホモロジー環」、「(ある種の群作用を持つような）有限次元ゴレンシュタイン代数」等が本研究課題で扱うテーマの「雛形」を与えるものと考えることができる。このような題材の中で特に我々が興味を持つ構造は、これらを統制する組合せ構造、即ち、半順序構造、グラフ構造、マトロイド等であり、こうした構造が機能するメカニズムを統一的に理解し一般化するために量子対称性という視点からのアプローチを用いると共に、有限次元ゴレンシュタイン代数を多様体のコホモロジー環との類推で研究するという立場から、レフシェッツ性とその組合せ的応用に着目した研究を進める。

４．研究成果

(1) シューベルト・カルキュラスとその一般化に関して、ニコルス・ウォロノヴィッツ代数により記述されるワイル群上の非可換微分構造の観点から研究を行い、主に旗多様体の（量子）K 環とアフィン・グラスマニアンのホモロジー群に関する結果を得た。

アフィン・ワイル群の作用の基本領域は alcove と呼ばれ、隣り合う alcove をつなげてできるパスはアフィン・ワイル群の元の鏡

映の積への分解の情報を与えている。興味深いことに、この構造は K 環の場合とアフィン・グラスマニアンのホモロジーの場合の双方に対して、それらをニコルス・ウォロノヴィッツ代数の部分代数として構成する際に基本的な役割を果たし、ワイル群上の非可換微分構造やダンクル元の構成と密接に結び付いている。ここで得られたダンクル元の可換性はヤン・バクスター関係式からの帰結であり、可積分系の理論との繋がりが見て取れる。このような構成の一部分は複素鏡映群の余不変式代数に対しても可能であり、複素鏡映群に付随したダンクル作用素の理論との関係は今後の興味深い研究課題である。

アフィン・グラスマニアンのホモロジーと旗多様体の量子コホモロジー環に関してはある種の自然な同型が存在することが知られている。アフィン・ワイル群に付随したニコルス・ウォロノヴィッツ代数はその部分代数としてアフィン・ニル・ヘッケ代数を含んでおり、上述の同型に対してもニコルス・ウォロノヴィッツ代数上のある種の作用素を通じた解釈を与えることができた。この構成は、以前から知られていたフォーミン・キリロフの二次代数の量子化で用いられる関係式に対する一つの説明も与えている。

(2) 体上の有限次元可換ゴレンシュタイン代数のレフシェッツ性に関しては、有限コクセター群の余不変式代数のレフシェッツ元の決定、及び、マトロイドに付随した新しいゴレンシュタイン代数の構成とそのレフシェッツ性に関する結果を得た。

有限コクセター群が結晶的である場合、対応する余不変式代数は旗多様体のコホモロジー環と同型であり、強レフシェッツ定理が適用可能である。さらに、直線束の豊富性の判定条件を用いることで、そのレフシェッツ元の決定もできる。しかし、コクセター群が非結晶的である場合には、いずれの結果も適用できない。我々は、非結晶的な場合にはその基底の具体的構成とピエリ型公式を用い、計算機も利用することで、(H_4 型の場合を除き）対応する余不変式代数のレフシェッツ元を決定することができた。更に、ある種の等質空間の場合にも同様の結果を得ている。

有限幾何に付随して現れる束は組合せ的にも極めて重要な研究対象であり、その多くはマトロイドと対応している。我々の研究では、マトロイドに付随して新しいクラスのゴレンシュタイン代数を導入し、幾何的モジュラー束の場合にその定義イデアルのグレブナー基底を決定した。逆に、我々の構成した代数から幾何的モジュラー束を特徴付けることも可能である。更に、これまでの研究で得られていた強レフシェッツ性のヘッシアン判定法を用い、幾何的モジュラー束に対応する場合のゴレンシュタイン代数に対して、その強レフシェッツ性を証明した。特に、有限体上の有限次元ベクトル空間が成す束が中心的なピースとなっている。幾何的モジュラー束がスパーナー性を持つことは知られている結果であるが、我々の結果はその事実に対する環論的な別証明を与えている。これらの結果は更にブロック・デザインに対しても一般化が可能であり、有限幾何の観点からも興味深いと思われる。

この研究で導入したマトロイドに付随するゴレンシュタイン代数の定義イデアルは、グレブナー基底の観点からも著しい性質を持っており、特に重要な場合には単項式と二項式により生成されている。このことに注目し、この定義イデアルのグレブナー扇と、ゴレンシュタイン代数の構成に現れる多項式が定めるトロピカル超曲面との関係についても具体的な記述を得ることができた。

レフシェッツ性の研究に関しては、組合せ論への応用と、環論的興味の双方から近年関心が高まりつつあるが、これまでレフシェッツ性の理論に関して体系的にまとめられた成書は存在していなかった。そこで、共同研究者と共にレフシェッツ性の基礎事項からオリジナルな結果まで含めた著書を出版した。著書の内容にはレフシェッツ性を持つ環の一般的な構成法、レフシェッツ性の判定の他、複素鏡映群の余不変式代数のレフシェッツ性等に関するオリジナルな結果を含んでいる。

(3) 情報科学においても組合せ的な問題は頻繁に現れ、上述の諸テーマともしばしば密接に関係している。このような情報科学への応用を見込んだ研究にも着手し、「関数密度問題」という形で定式化できるタイプの問題に関連して幾つかの結果を得た。関数密度問題は、ある意味でデザイン的な問題意識に関わっているものであるが、その枠組みでハッシュ関数の安全性、及び、疑似乱数生成器の性能評価への応用を試みた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① K. Nuida, T. Abe, S. Kaji, <u>T. Maeno</u> and Y. Numata, “A mathematical problem for security analysis of hash functions and pseudorandom generators,” Internat. J. Found. Comput. Sci., 査読有, Vol. 26, 2015, 169-194.

② <u>Toshiaki Maeno</u> and Yasuhide Numata, “Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein

algebras," Tropical geometry and integrable systems, Contemp. Math., 査読有, Vol. 580, 2012, 73-84.

③ Anatol N. Kirillov and Toshiaki Maeno, "Affine nil-Hecke algebras and braided differential structure on affine Weyl groups," Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, Vol. 48, 2012, 215-228.

④ Toshiaki Maeno, Yasuhide Numata and Akihito Wachi, "Strong Lefschetz elements of the coinvariant rings of finite Coxeter groups," Algebr. Represent. Theor., 査読有, Vol. 14, 2011, 625-638.

〔学会発表〕(計５件)

① 前野俊昭,「有限幾何とレフシェッツ性」, 第 35 回可換環論シンポジウム, 2013 年 12 月, 京都大学数理解析研究所.

② Toshiaki Maeno, "The Fomin-Kirillov quadratic algebra and its affinization," Bethe Ansatz, Quantum Groups and Beyond, 2013 年 3 月, 京都大学数理解析研究所.

③ Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata, "On the Sperner property and Gorenstein algebras associated to matroids," The 24th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 2012 年 7 月, 名古屋大学.

④ Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata, "Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras," Tropical Geometry and Integrable Systems, 2011 年 7 月, University of Glasgow.

⑤ 前野俊昭,「Alcove path と affine Weyl 群上の非可換微分構造」, 日本数学会年会・無限可積分系セッション特別講演, 2011 年 3 月, 早稲田大学理工学術院.

〔図書〕(計１件)

T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Y. Numata, A. Wachi and J. Watanabe, "The Lefschetz properties," Springer, 2013, xx+250pp.

６．研究組織

(1)研究代表者

前野　俊昭　(MAENO, Toshiaki)
名城大学・理工学部・准教授
研究者番号：６０２９１４２３