様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：３４３１６
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００１６
研究課題名（和文）　多重旗多様体の軌道分解

研究課題名（英文）　Orbit decomposition of multiple flag varieties

研究代表者
松木　敏彦　（MATSUKI TOSHIHIKO）
龍谷大学・文学部・教授
研究者番号：20157283

研究成果の概要(和文):奇数次直交型三重旗多様体の典型例について､その軌道分解を与えた。これは標数２以外の任意の体上で成り立つ。副産物として、一般線形群の旗多様体上の様々な群に関する軌道分解も得られた。軌道の数の式と有限体の場合の各軌道に含まれる元の数の式も与えた。

研究成果の概要（英文）: We described orbits on a typical triple flag variety of orthogonal group of odd degree. This result holds over an arbitrary field of characteristic not two. As byproducts, we obtained orbit decompositions of the flag variety for the general linear group by various subgroups. We also computed number of orbits and number of elements in each orbits when the field is finite.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数群

１．研究開始当初の背景

(1) 一般線形群と symplectic 群の場合

$G=GL_n$ を(任意の体 **F** 上の)一般線形群とし、$G/P_1, \cdots, G/P_n$ を G の旗多様体とするとき、G は多重旗多様体 $G/P_1\times\cdots\times G/P_n$ に対角型に自然に作用する。Magyar-Weyman-Zelevinsky [1] は 1999 年にこの作用が有限型である（**F** が無限体のときに軌道が有限個になる）ための $G/P_1, \cdots, G/P_n$ の条件を求め、軌道の parametrization を与えた。特に、有限型であるためには n が 3 以下であることが必要であることも示された。n=2 の場合は Bruhat 分解に他ならないので n=3 の場合が問題であった。彼らはこの問題を次のように quiver の表現の問題に帰着させて解決した。

$G/P_1, G/P_2, G/P_3$ はそれぞれ $\mathbf{F}^n$ の部分空間の増大列 $U_1,\cdots,U_{p-1}$, $V_1,\cdots,V_{q-1}$, $W_1,\cdots,W_{r-1}$ の集合であるので、inclusion map をつなぎ合わせることにより、1 点で３つに分岐した quiver の表現が与えられる。この quiver が有限 Dynkin 型のときは Gabriel の定理により有限型であるが、map を単射なものに制限しているために有限型のもの

はこれら以外にも存在する。彼らは V. Kac [3] の理論を用いてこれを分類し、さらに直和分解に関する indecomposable object を分類することによって軌道分解を記述した。

引き続く論文 [2] において、彼らは symplectic 群に対して同じことを行なった。一般線形群に埋め込む方法によっているために、indecomposable object の記述が煩雑になっているように思われる。彼らは直交群についても同様にできると書いているが、文献は見当たらない。

(2) 表現のテンソル積の分解との関係

Littelmann [4] は表現のテンソル積の分解の問題に帰着させることにより、一般の単純代数群 G について P_1, P_2 が極大放物型部分群で P_3 が Borel 部分群の場合に有限型になるための条件を決定している。この論文の分類表を見れば、直交群と例外群について興味深い現象が見られる。

(3) 対称部分群に関する軌道分解との関係

対称対 (G, K) について K が１次元の中心を持つ場合、K は２つの極大放物型部分群 P_1, P_2 の共通部分として記述でき、対称空間 G/K は旗多様体の直積 $G/P_1 \times G/P_2$ の稠密開集合に自然に埋め込まれる。従って G/K の P_3-軌道分解（これは G/P_3 の K-軌道分解と同一視できる）は $G/P_1 \times G/P_2$ の P_3-軌道分解（これは $G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$ の G-軌道分解と同一視できる）に埋め込まれる。このようにある種の対称部分群による旗多様体の軌道分解 ([5] など)は多重旗多様体の軌道分解に埋め込まれる。

[1] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Multiple flag varieties of finite type, Adv. Math. 141(1999), 97-118

[2] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Symplectic multiple flag varieties of finite type, J. Alg. 230(2000), 245-265

[3] V. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, Invent. Math. 56(1980), 57-92

[4] P. Littelmann, On spherical double cones, J. Alg. 166(1992), 142-157

[5] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan 31(1979), 331-357

２．研究の目的

(1) 複素直交群および複素単純例外群に関する多重旗多様体について、軌道が有限個になるための条件を求め、軌道の parametrization を与える。これによって複素単純代数群の多重旗多様体の有限型軌道分解の理論を完成させる。

(2) 任意の体上の Chevalley 型代数群について(1)と同じことを行なう。

(3) 軌道の最小余次元が１の場合の分類を行なう。

(4) 表現論や微分方程式論との関連を調べる。

(3) の最も基本的な例はリーマン球面の４つの直積への GL_2 の作用である（これは D_4 型の拡大 Dynkin 図形の形の quiver の表現である)。これには Gauss の超幾何微分方程式が関係している。さらに、文献 [1] における分類では E_6, E_7, E_8 型の拡大 Dynkin 図形に対する多重旗多様体が重要であった。これらも (3) の例である。

一般線形群の場合の多重旗多様体の indecomposable object への分解は、一般の複素単純リー群については極大トーラスとルート系の問題として捉えることができる（特に、有限型であるために n が 3 以下であることの必要性は容易に示せる)。一般線形群と symplectic 群以外の単純群については、現時点では quiver の表現論に帰着させること（[1]、[2] で用いられた方法）はかなり無理があると思われる。対称部分群による旗多様体の軌道分解において研究代表者によって用いられた多くの手法は個別の例の計算において有用であると思われる。

３．研究の方法

複素直交群および例外型単純群の多重旗多様体について、開軌道が存在する条件を求め、無限型の多重旗多様体が埋め込まれている場合を除外することにより、有限型になるための条件を求め、軌道分解を記述する。任意の体上の Chevalley 型代数群についても定式化するとともに表現の分岐則との関連を調べる。さらに軌道の最小余次元が１の場合の分類を行ない、微分方程式論との関連を調べる。

研究計画

(1) 複素直交群の多重旗多様体について開軌道が存在する条件を求め、さらに無限型の多重旗多様体が埋め込まれている場合を除外することにより、有限型になるための条件を求める。

(2) ルート系の言葉で軌道分解を記述する。

(3) 例外型単純群について同じことを行なう。

(4) 任意の体上の Chevalley 型代数群について定式化する。

(5) 表現の分岐則との関連を調べる。

(6) 軌道の最小余次元が１の場合の分類を行ない、微分方程式論との関連を調べる。

以上の研究計画を行なうため、次のことが必要である。

① 表現論・微分方程式論との関連については東京大学の小林俊行・大島利雄との研究連絡を行なう。

② この研究に関係する海外の研究者と研究交流を行なう。

③ リー群の構造と表現に関する研究集会を行なう。

④ 国内でのリー群、代数群、表現論関係の研究集会に出席するとともにその運営に協力することは、この研究の進展に根本的に重要である。

⑤ リー群、代数群、表現論関係の書籍を充実し、必要な情報関連機器を整備する。

４．研究成果

(1) 奇数次直交型三重旗多様体の典型例について、その軌道分解を与えた。これは標数２以外の任意の体上で成り立つ。副産物として、一般線形群の旗多様体上の様々な群に関する軌道分解も得られた。軌道の数の式と有限体の場合の各軌道に含まれる元の数の式も与えた。

当初の計画では複素数体上の直交群を扱う予定であったが、具体的に軌道分解を決定する方法に変更したことにより、一般の体上で統一的な結果が得られた。さらに、軌道構造も記号表示によって詳細に記述できた。

本研究の結果の一部は Henderson-Trapa による exotic Robinson-Shensted 対応の研究で引用されている。その他にも小林俊行による重複度自由表現の研究とも関連しており、また、群のコンパクト化との関連も興味深い。

(2) 直交型多重旗多様体のうち、無限型のものの基本形を決定した。特に、４重旗多様体の最も簡単なものが無限型であるので、これを用いてすべての４重旗多様体が無限型であることを示した。よって、３重旗多様体が有限型になるための条件が本研究の主要問題となる。

上記の無限型のものの基本形を用いて、奇数次直交型３重旗多様体が有限型になるための必要条件を導いた。この条件を満たすものは３通りに分類できて、１つの場合については公表済みの論文において有限型であることをすでに示した。次に簡単な場合についても同様の方法を用いて、解決できた。

最後の複雑な場合については基本的な証明方法はできているが、完成していない。この場合の典型例としては、３つの旗の型がそれぞれ (7,1,7), (5,5,5), (3,3,3,3,3) の場合がある。このとき、群 SO(15) の次元と３重旗多様体の次元が等しくなり、「分解不可能」多重旗多様体の興味深い例を与える。偶数次直交型３重旗多様体および例外型多重旗多様体の有限性の条件についてはまだ研究できていない。

関連する研究として、１つの旗多様体が最大の場合（放物型部分群がボレル部分群の場合）については Littelmann, Stembridge によって有限型になるための条件は決定されている。しかしながら、彼らは開軌道の存在を示したのであって、具体的な軌道分解は今後の研究課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

① Toshihiko Matsuki, An example of orthogonal triple flag variety of finite type, J. of Algebra 375(2013), 148-187, 査読有り
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.11.012

〔学会発表〕（計　３件）

①松木敏彦、直交型三重旗多様体の軌道分解の一例、数理解析研究所研究集会「表現論と調和解析における諸問題」、2011/6/30、京都大学

② 松木敏彦、有限個の軌道を持つ直交型三重旗多様体の例、日本数学会秋季総合分科会、2011/10/1、信州大学

③ 松木敏彦、直交型三重旗多様体の軌道分解の一例、日本数学会秋季総合分科会、2011/10/1、信州大学

〔その他〕

ホームページ等 Home page of Toshihiko MATSUKI (松木敏彦)

http://www.ab.auone-net.jp/~matsuki/

６．研究組織
(1)研究代表者
松木　敏彦 (Matsuki Toshihiko)
龍谷大学・文学部・教授
研究者番号：20157283