様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４００１７
研究課題名（和文）有限体および局所体上の対称空間の表現論

研究課題名（英文）Representation Theory of Symmetric Spaces over Finite or Local Fields

研究代表者
加藤　信一（KATO, Shin-ichi）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０１１４４３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円、（間接経費）　990,000円

研究成果の概要（和文）：有限体およびp進体上の簡約群に付随する対称空間の表現並びに調和解析を，対応する群の表現論を一般化する形で研究した．まずp進群の場合に，相対尖点表現の新しい例を構成することに成功した．また対称空間上の表現が緩増加表現になるための判定条件を相対尖点表現または相対二乗可積分表現の場合に類似する形で確立した．これは群の場合に知られている結果の自然な拡張でもある．また有限体の場合にコホモロジー誘導による対称空間の相対尖点表現の構成も研究した．

研究成果の概要（英文）：We studied representations and harmonic analysis of symmetric spaces associated to reductive groups over finite or p-adic fields as a generalization of the representation theory of these groups. In the case of symmetric spaces over p-adic fields, we succeeded in constructing new examples of relatively cuspidal representations. We established criteria for tempered representations in the form analogous to the case of relatively cuspidal representations or square-integral representations. This is a natural extension of the criteria for group case. In the finite fields case, we studied a construction of relatively cuspidal representations on symmetric spaces by cohomological induction.

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：対称空間　表現論　簡約群　有限体　局所体

１．研究開始当初の背景
実数体上の対称空間の表現論は，実半単純リー群の表現論の自然な拡張として，フレンステッド=イェンセン，大島，ドゥロームなどの貢献により大きく発展してきた．そこでは対称空間上の二乗可積分表現（離散系列表現）を軸にして表現論や調和解析が，研究されている．それに比べて有限体やｐ進体上の簡約群に付随した対称空間の表現論，調和解析には，まだ未知の領域が広がっていると言って過言ではない．（なお実数体あるいは有限体の場合には群の表現の研究はかなり進んだ状態だが，ｐ進体の場合にはまだ発展の余地が多分にある，という相違点はある．）
　しかし近年，本研究代表者（加藤）および連携研究者（高野），またドゥロームなどによって，ｐ進体上の対称空間に付随した放物型部分群，つまりシグマ分裂な放物型部分群（対称空間を定める対合シグマでひねるとオポジットになるようなもの），およびそれに対応するシグマ分裂トーラスや，そのシグマ分裂な放物型部分群からの誘導表現，あるいはジャッケ加群上の不変１次形式を与える相対ジャッケ写像を用いて，対称空間の調和解析が記述できるようになってきた．なかんずく相対尖点表現や相対二乗可積分表現などの研究が進展して来ている．この状況をさらに推し進めて，ｐ進体上のものに加えて有限体上のものも取り込んで，基礎体を超えた大きな視野のもとで対称空間の表現論，調和解析が構築される基盤が整ってきている．

２．研究の目的
本研究課題の目的は，実数体上の対称空間の表現論を参考にしながら，有限体やｐ進体の上の対称空間の表現論に，基礎体を超えた形で，かつ通常の簡約群の表現論の自然な拡張となるような枠組みをあたえることである．その際には対称空間の調和解析に数論への応用も見込んだ形での進展を期待したい．具体的に書くと以下のようになる：

（１）簡約群の尖点表現の類似である相対尖点的表現が，部分表現定理や相対ジャッケ写像による特徴付けなどを通じて重要な役割を果たすことがわかってきたことに鑑み，相対尖点的表現を中心にして，対称空間の表現の構造を考察することが重要になる．その際には
①　相対尖点表現の構成
ならびに
②　相対尖点表現を用いてシグマ分裂放物型部分群から誘導した表現をどのように分解して対称空間の表現が得られるか，古典的なハリシュチャンドラ流の表現の分類を明らかにする
の２点が最も大きな問題となる．

（２)特にｐ進体の場合には二乗可積分表現，緩増加表現などを扱って対称空間の調和解析を進展させることを目指すことになる．そのためにまず二乗可積分表現，緩増加表現の特徴付けが課題になる．その際には古典的に群の場合に得られていた判定法と対比させることが興味深い．

（３）有限体上の対称空間については，群の表現の研究が進んでいることを利用して，各種の具体例を精査する．またこの検討により，リー群の場合と同じように，相対尖点表現の存在条件と，シグマ分裂な極大トーラスとの対応を確立させることが目標になる．その際には群の場合のドリーニュ・ルスティック理論がどのように対称空間に拡張されるか調べる．

３．研究の方法
（１）有限体やｐ進体上の簡約群の表現論同様，ハリシュチャンドラ流の誘導表現およびジャッケ加群が基本的な道具になる．

（２）ｐ進体の対称空間の場合は，それに加えて対称空間の構造論（一般化された分解定理など）や，表現上の不変１次形式の振る舞いを記述するために加藤・高野とラジエが独立に定式化した相対ジャッケ写像が有効である．この相対ジャッケ写像を用いて，一般化された行列成分の漸近挙動を調べることにより，表現の増大度を記述する．

（３）有限体の場合はエル進コホモロジーを用いるドリーニュ・ルスチック理論が有効と思われる．しかしこの理論が対称空間ではまだ十分には活用できていないので，取り入れるための自然な枠組みを検討する．さらに進めて，指標層などの幾何学的表現論と取り込むことも視野に入れる．

４．研究成果
（１）簡約群Ｇの対合シグマに関して定まる対称空間, つまりＨをシグマの固定化部分群とするとき，等質空間 G/H を考える．この対称空間上で実現される表現は，H-不変な１次形式を持った表現，（H-）ディスティンギッシュトな表現と捉えることが出来る．
　加藤（研究代表者）と高野（連携研究者）はｐ進体上の場合に，対称空間上のコンパクトな台を持つ関数空間上に実現されるディスティンギッシュトな表現を相対尖点表現と定義してその性質を調べていた：任意のディィスティンギッシュトな既約表現に対して，シグマ分裂な放物型部分群とそのレビ部分群の相対尖点的既約表現の組で，元の表現が放物型部分群からの誘導に含まれるようなものが取れる，という部分表現定理が，ジャッケによる群の尖点表現の場合の拡張として一般の形で成立すること，および表現が相対尖点的になるかどうかが相対ジャッケ写像の消滅性によってわかるという，ジャッケの定理の対称空間への拡張が成立すること

の２点が既に得られていた．
　このように相対尖点表現は対称空間の調和解析においては基本的な役割を果たすが，それがどのように構成されるかについては不明なことが多い．これに関して，これまでの研究では，相対尖点表現とシグマ安定な（分裂ではなく）放物型部分群との関連が予測されていた．今回，一般線型群の２次拡大に伴うベイスチェンジから定まる対称空間について，ある種のシグマ安定な放物型部分群のレビ部分群のディスティンギッシュトな既約尖点表現からの誘導として，相対尖点表現が得られることを示すことができた．この手法がどれだけ一般化されるかについては，まだ未知の部分が多いが，相対尖点表現の有効な構成法になることが期待される．

（２）対称空間の調和解析においては，対称空間上の二乗可積分表現ならびに緩増加表現が大きな役割を果たす．群の表現については，それは二乗可積分になるかどうか，あるいは緩増加表現になるかどうかについてはジャッケ加群のエクスポーネントを見ることでわかるというキャッセルマンの判定法がある．われわれはまず与えられたディスティンギッシュトな表現が二乗可積分になるかどうかを，相対ジャッケ写像とそこに現れるエクスポーネントを用いて自然な形で拡張した．そしてさらには緩増加表現についても同様の判定法が成立することを確立した．われわれの結果とドゥローム，カルモナ，ハリンクなどの結果を合わせると，対称空間の場合にも，緩増加表現は群の場合と類似の形で特徴付けられることがわかる．
　これらの結果はいずれも相対ジャッケ写像を用いた，一般化された行列成分の漸近挙動の精密な評価や，対称空間の構造論を用いることにより得られるものである．

（３）有限体上の対称空間の表現に対しても進展があった．坂内・川中・ソンによる予想を満たす表現の系列の存在が既にある種の仮定の下で構成されていたが，これらの仮定を弱めた形で示すことに成功した．つまり，実リー群の場合と同様に，有限体上のシグマ分裂な極大トーラスの非特異な一次指標に対して既約ディスティンギッシュト表現が定まり，その次数が通常の群の場合のマクドナルド予想に類似した形で与えられるという命題を，以前より弱い仮定の下で証明することに成功した．この結果は坂内-川中-ソンによる予想を裏付けるものになっている．さらにはこの新しく得られた表現は，対応するトーラスが有限体上ミニソトロピックであるとき，有限体上の相対尖点表現と呼ぶべきものになる．これより有限体上の相対尖点表現の組織的な研究が必要になってきたが，これについてはまだ手がついていない．なおここでの表現の構成にはルスティック誘導関手を用いる．その意味で，ここで得られた表現は幾何的に構成されるドリーニュ・ルスティック表現の対称空間上の類似物と見なすことが出来る．ただしこの表現を対称空間の幾何学，あるいは指標層の理論と直接対応づけることにはまだ成功していない．これは今後の課題となっている．

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）


① S.Kato and K.Takano, Square integrability of representations on p-adic symmetric spaces. Journal of Functional Analysis 258, 2010, 1427-1451, 査読有 DOI:10.1016/j.jfa.2009.10.026
② 加藤信一, 高野啓児, Discrete series for symmetric spaces over p-adic fields,　数理解析研究所講究録 1767, 2011, 14-24, 査読無 http://hdl.handle.net/2433/171452


〔学会発表〕（計５件）


① 加藤信一, Lusztig-Yun によるウェイト重複度公式の(-q)-累次について, 北見代数群セミナー, 2012 年 8 月 28 日, 北見工業大学
② 加藤信一, 対称空間に付随した表現について,　釧路表現論研究小集会, 2013 年 8 月 22 日, 北海道教育大学釧路校
③ 高野啓児, Relatively cuspidal/ discrete /tempered representations for sym- metric spaces I, II, 第 16 回白馬整数論オータムワークショップ「球等質空間 H\G 上の調和解析」, 2013 年 11 月 8 日, 白馬ハイマウントホテル
④ 高野啓児, Relative subrepresentation theorem and some related topics, 第 16 回白馬整数論オータムワークショップ「球等質空間 H\G 上の調和解析」, 2013 年 11 月 9 日, 白馬ハイマウントホテル
⑤ 高野啓児, GL(n;F)-distinguished representations of Res_E/F GL(n), Workshop 2014, Structure of L^2(H\G) --local Galois case--, 2014 年 3 月 29 日, 岡山大学理学部


〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
特になし

## ６．研究組織

(1)研究代表者
加藤　信一（KATO SHIN-ICHI）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90114438

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
高野啓児（TAKANO KEIJI）
明石工業高等専門学校・一般科目・准教授
研究者番号：40332043