様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４００２２

研究課題名（和文）多変数楕円超幾何関数系への表現論的アプローチ

研究課題名（英文）Representation theoretical aproach to multi-variate elliptic hypergeometric functions

研究代表者
今野　均（Konno, Hitoshi）

広島大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：００２９１４７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 3,300,000円、（間接経費）　 990,000円

研究成果の概要（和文）：楕円量子群U_{q,p}(g)とE_{q,p}(g)を，pの形式的巾級数環上の位相代数として再定式化し，gl_n型の場合にそれらが同型であることを示した．また，B(1)_N型の場合にホップ亜代数構造を定めた．表現論的には，U_{q,p}(g)における量子Z-代数の構造を明らかにし，表現の既約性をZ－代数のそれに帰着させることに成功した．多変数楕円超幾何関数に関しては，新たにsl_n型のものが頂点-面型対応の繋絡ベクトルとその双対を用いて表せることを示した．さらに，U_{q,p}(sl_2)の表現の応用として，XXZ模型零質量相の構造因子の厳密な導出と解析を行った．

研究成果の概要（英文）：We have reformulated the two elliptic algebras U_{q,p}(g) and E_{q,p}(g) as topological algebras over the ring of formal power series in p and shown that they are isomorphic for g=gl_n. We also have formulated the dynamical quantum Z-algebras associated with U_{q,p}(g), and shown that the irreducibility of the U_{q,p}(g)-modules is governed by the corresponding Z-modules. As for the multivariate elliptic hypergeometric functions, we have shown that the sl_n type found by Kajihara-Noumi and Rosengren is given by a certain tensor product of the symmetric fusions of the sl_n type vertex-face intertwining vectors and their duals. Furthermore, as an application of the representations of U_{q,p}(sl_2), we have derived and analyzed the structure factor of the massless XXZ model exactly.

研究分野：数理物理学，表現論，代数解析

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：楕円量子群　楕円超幾何関数　アフィン リー環　楕円関数　量子群　超幾何関数　Sklyanin代数　可解格子模型

１．研究開始当初の背景

(1) 楕円量子群とは, 生成元の母関数が楕円関数を構造関数とする関係を満たす新しいタイプの無限次元の双代数である．生成元と余代数構造の違いにより次の３種が知られている．シュバレー生成元によって定式化される準ホップ代数, 頂点型 $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と面型 $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{g}})$, ドリンフェルト生成元によって定式化されるホップ亜代数 (面型) $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$, L-作用素によって定式化されるホップ亜代数 (Felder の楕円量子群 (面型)) $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{g})$. ここで $\widehat{\mathfrak{g}}$ はアフィンリー環, $\mathfrak{g}$ は有限次元単純 Lie 環である．三角関数型の通常の量子群 (アフィン量子群)$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のホップ代数としての３種の定式化の同型を援用すれば, これら３種の楕円量子群は高々 $\mathfrak{g}$ のランク個数のハイゼンベルグ代数をテンソルする程度で同型となることが予想されている．この関係を明らかにすることは楕円量子群の理論の発展のために不可欠である．

(2) 近年, 超幾何関数の楕円関数類似の研究が急速に展開され, 多変数のものまで含めて特殊関数の楕円関数類似の研究の気運が国際的に高まって来ている．１変数の楕円超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ に対しては, 代表者により楕円量子群の表現論の観点から次の２通りの定式化がなされている．

① $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 型楕円 R 行列の頂点-面型対応を与える繋絡ベクトルとその双対のテンソル積として表すことができる．この表式は, ${}_{12}V_{11}$ に対するヤンバクスター型方程式や双直交関係式, フュージョン公式などの導出に便利である．

② 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のベクトル表現のテンソル積に対するクレブシュ-ゴルダン係数の楕円関数類似として導くことができる．

多変数の楕円超幾何関数に対しては, 高ランクの楕円量子群の表現に基づいてこれら２通りの定式化が拡張できると期待される．

(3) 代表者らによって, 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元・無限次元表現を応用して楕円関数型の可解格子模型の代数解析的定式化がなされ, 模型の物理量の相関関数や形状因子の計算がなされている．特に, 形状因子のフーリエ変換は構造因子と呼ばれ, 中性子散乱実験で実際に観測できる量となる．構造因子の導出やその解析を押し進めることが次のステップとして期待されている．

２．研究の目的

楕円量子群の定式化の拡張や表現の整備をさらに押し進めるとともに, 次なる目標として多変数の楕円超幾何関数にねらいを定め, その楕円量子群に基づく表現論的な定式化を目指す．また, 関連する楕円関数型の量子可積分系の代数解析やホップ亜代数の公理系の拡張なども視野に入れて研究を行う．具体的な研究内容は大きく次の４つに分けられる．

(1) 楕円量子群 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の定式化の拡張と表現の整備：

ホップ亜代数としての楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定式化を他のアフィン リー環, $\widehat{\mathfrak{g}} = B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}$ の場合へと拡張する．また, 有限次元および無限次元表現を具体的に構成し, 特に応用上重要な無限次元表現の自由場表現やその上の繋絡作用素の実現を与える．さらに, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ と密接な関係がある変形 W-代数や Feigin-Odesskii 代数をこれらのルート系の場合へと拡張する．

(2) $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の中心元の構成と多変数楕円超幾何関数の表現論的定式化:

野海や Etingof-Kirillov, 三町は量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の中心元や有限次元表現に基づいて Macdonald 多項式の表現論的な導出に成功した．本研究では, 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の中心元の構成を行い, 有限次元表現や繋絡作用素, 頂点-面型対応との関係などを駆使してその拡張を行い, 多変数楕円超幾何関数や Macdonald-Koornwinder 多項式の楕円関数類似の表現論的な導出を目指す．

(3) 楕円関数型量子可積分系の代数解析

XXZ 模型の零質量相を代数解析的に定式化するためには, 一度, 楕円関数型の XYZ 模型の主相で定式化し, それをさらに不整合相へ変換する操作が必要である．本研究ではこの変換を $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現に基づく代数解析の枠組みで実現し, さらに XXZ 模型零質量相への極限を調べる．

(4) 準ホップ変形を許すホップ亜代数構造の定式化

準ホップ代数はベースとなる代数を変えずに余代数構造の変形を許し, アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ から出発して楕円量子群 $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ や $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の構成的な定式化を可能にする便利な枠組みであるが, 余結合律が余結合射による同型対応の意味でしか成り立たないという欠点を持つ．一方, ホップ亜代数構造は余結合律は満たすが, 準ホップ変形のような余代数構造の変形を許す枠組みにはなっていない．上で述べた $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の関係を手がかりに, ホップ亜代数の公理系を拡張して, 準ホップ変形を許す新しいホップ亜代数構造の定式化を目指す．

３．研究の方法

(1) 楕円量子群の定式化と表現の整備

① 楕円量子群 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の定式化

$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ ($\widehat{\mathfrak{g}} = B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}$) に対して, 楕円カレント (生成元の母関数) を用いてハーフカレントを構成し, それをガウス分解における成分として L 作用素を構成

する．また, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 型の面型楕円 R 行列に対して RLL 関係式を導き, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定義関係式との関係を明らかにし, これに基づいて $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ をホップ亜代数として定式化する．さらに, 有限次元, 無限次元表現を構成し, ホップ亜代数構造に基づいて繋絡作用素の構成を行う．

② **$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の中心元の構成**

通常の量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ において知られている構成法にならって, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の L-作用素を用いてその中心元を構成する．このために, 既に構成済みの L-作用素 L^+ に加えて作用素 L^- をハーフカレントを用いて構成し, これらが満たす RLL-関係式を利用する．

(2) **多変数楕円超幾何関数の定式化**

次の 2 通りのアプローチが考えられる．これらは互いに相補的な関係にあり, これらを組み合わせて考えることによって互いの難点を解消しながら目的の達成を目指す．

① ${}_{12}V_{11}$ に対して見出した頂点-面型対応との関係を高ランクの場合へと拡張する． 一方で, 頂点-面型対応の繋絡ベクトルと楕円 Ruijsenaars 系の差分作用素との関係が長谷川によって与えられているので, これらの結果の融合を試みる．

② Rains によって Macdonald-Koornwinder 多項式の楕円関数類似が補間アーベリアン関数による二項定理の拡張を用いて定式化されている．これは, ${}_{12}V_{11}$ の自然な多変数関数への拡張になっている．ポイントは補間アーベリアン関数を特徴付ける差分方程式であり, その差分作用素は $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の L-作用素に基づくベーテ仮設法に関係があると期待される．この点を明らかにし, Rains の結果を楕円量子群に基づいて表現論的に再定式化する．

(3) **楕円関数型可解格子模型の代数解析**

頂点-面型対応と $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現に基づいて XYZ 模型の主相と不整合相における形状因子を代数解析的に定式化する．次いで, 自由場表現を用いて, 2-励起状態（スピノン）に対する形状因子を導き, 三角関数極限での構造因子を導出する．結果に基づいてエネルギー閾値での漸近的振舞などを解析する．

(4) **準ホップ変形を許すホップ亜代数構造**

ホップ亜代数構造のうち余積に関する部分の準ホップ変形は Xu によって既に議論されている．本研究では, 量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ を基に構成的に定義される $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の構造や $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ との関係を手がかりに, 両者の対合射の関係や準ホップ変形を許すような拡張されたモーメント射の公理系を見出す．

4．研究成果

(1) **楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ と $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ の再定式化と同型**

① 面型楕円代数について, Drinfeld 型 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ と Faddeev-Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky-Takhtajan (FRST) 型 (所謂 Felder の楕円代数) $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ ($\widehat{\mathfrak{g}}$: 非捩アフィン リー代数) を, p の形式的巾級数環上の位相代数として再定式化した．

② $R^{\pm}L^{\pm}L^{\pm}$ および $R^{\pm}L^{\pm}L^{\mp}$-関係式に基づいて, ハーフカレントと $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ のトータルカレントとの関係を導き, FRST 型楕円代数 $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ と $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ の同型を与えた．

(2) **楕円量子群 $U_{q,p}(B_n^{(1)})$ の定式化**

① 楕円カレントの積分変換としてハーフカレントの構成を試み, 明示式の予想を得た．特に, 一部のハーフカレントに対しては, 基本的なハーフカレントから漸化的に構成する構造を見出した．また, ハーフカレントの明示式より $2n+1$ 次元表現を構成し, ガウス分解の形でそれらを L-作用素に組んだものが $B_n^{(1)}$ 型の面型楕円 R 行列成分を再現することを確認した．

② レベル 1 の無限次元既約表現を n 個のドリンフェルト ボソンと 1 個のフェルミオンを用いて構成した．

③ ① の予想の下で, L-作用素をハーフカレントによるガウス分解の形で与え, これにより $U_{q,p}(B_n^{(1)})$ にホップ亜代数構造を導入して楕円量子群として定式化した．

④ ③ の L 作用素を用いてレベル一般の無限次元既約表現空間上のタイプ I とタイプ II の繋絡作用素に対する繋絡条件を設定し, それをある解析的な条件を仮定して解くことによって, 繋絡作用素を決定した．また, レベル 1 表現の場合に ② の結果を適用して, タイプ I, タイプ II 繋絡作用素の自由場表現を構成した．さらに, ハーフカレントが RLL 関係式を満たすことより, これらの繋絡作用素は R-行列を係数行列とする交換関係を満たすことを示した．

(3) **楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の表現と量子 Z-代数**

① $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル k 表現に付随するダイナミカル量子 Z-代数 $\mathcal{Z}_k$ を定式化し, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ および $\mathcal{Z}_k$ のレベル-k の無限次元表現のある部分圏同士が同値となること, 特に, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の最高ウェイト表現の既約性は対応する $\mathcal{Z}_k$ の表現の既約性に帰着されることを示した．

② これに基づき, $\widehat{\mathfrak{g}} = A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ の場合に, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル

1 最高ウェイト既約表現を対応する $\mathcal{Z}_1$ の既約表現を用いて具体的に構成した. また, それらの既約表現が対応するコセット型変形 W-代数の Verma 加群の直和に分解することを, 指標の比較により明らかにした.

(4) **Drinfeld 余積と変形 W 代数**

① $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の楕円カレントに対して, Drinfeld 余積と呼ばれる新しい余積を定式化した.

② 単線連結型の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の場合に, Drinfeld 余積に基づく新しい繋絡作用素を導出し, その合成積が対応する $\widehat{\mathfrak{g}}$ 型の変形 W 代数の生成母関数を与えるという新しい関係を見出した.

(5) **多変数楕円超幾何級数の定式化**

① $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ 型の頂点型楕円 R-行列と面型楕円 R-行列の間の頂点-面型対応を与える繋絡ベクトルとその双対を用いて, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の長谷川流の L-作用素の構成を行い, その補助空間に関するトレースが, 梶原-野海, Rosengren らによって定式化された $\mathfrak{sl}_n$ 型の多変数楕円超幾何関数の特別な場合を与えることを示した. これは, 以前与えた $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合の繋絡ベクトルを用いた ${}_{12}V_{11}$ の構成の拡張に相当する.

② ① で構成した $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の L-作用素をさらにゲージ変換および対称フュージョンして補助空間に関するトレースをとることにより, 梶原-野海, Rosengren らによって定式化された $\mathfrak{sl}_n$ 型の多変数楕円超幾何関数が得られることを示した.

③ フュージョンされた $\mathbb{Z}_n$ Belavin 模型に Bethe 仮説法と $\mathfrak{sl}_n$-Sklyanin 代数のテータ関数の空間上の表現を適用することにより, 繋絡ベクトルを特徴付ける差分方程式を導出した.

(6) **XXZ 模型零質量相の構造因子**

① 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元及び無限次元表現の応用として, XXZ 模型の零質量相での形状因子と構造因子の厳密な導出を行った. このために, まず, その楕円関数的拡張である XYZ 模型主相での形状因子を導出し, 次にそれを不整合相のものへと変換し, さらにモジュラー変換してから三角関数極限をとるという手順を踏んだ.

② 特に, XYZ 模型における主相から不整合相への変換を代数解析的定式化の中で実現し, 2 つの相の形状因子の関係を導いた.

③ 構造因子の和則に対する 2 スピノン状態の充足率や閾値近傍における振る舞いを解析し, 冪的に発散することを示すとともにその指数を決定し, Affleck らによって場の理論による近似で求められていた予想を裏付けた.

(6) **準ホップ代数 $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{g}})$ とホップ亜代数 $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の関係**

準ホップ代数 $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{g}})$ とホップ亜代数 $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ に対して, それらの余積と対合射の関係を見出し, 前者に $\mathfrak{g}$ のランク個のハイゼンベルグ代数をテンソルすることにより後者の余代数構造が導かれることを見出した.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

① R.M.Farghly, H. Konno and K.Oshima, "Elliptic Algebra $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ and Quantum Z-algebra", *Algebras and Representation Theory*, 査読有, 掲載決定

② H. Konno and K.Oshima, "Elliptic Quantum Algebra $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ and Vertex Operators", 研究会 "第１６回 代数群と量子群の表現論" 報告集, 査読無, 掲載決定

③ J-S Caux, H. Konno, M.Sorrell, R.Weston, "Exact form-factor results for the longitudinal structure factor of the massless XXZ model in zero field", 査読有, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* (2012) P01007, 掲載論文の DOI: 10.1088/1742-5468/2012/01/P01007

④ J-S Caux, H. Konno, M.Sorrell, R.Weston, "Tracking the effects of interactions on spinons in gapless Heisenberg chains", 査読有, *Physical Review Letters* **106** (2011) 217203-217206 掲載論文の DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.217203

〔学会発表〕(計 9 件)

① H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ and Solvable Lattice Models", 国際会議 "Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces"（招待講演） 2013 年 8 月 26 日～ 2013 年 8 月 30 日 名古屋大学

② H. Konno and K.Oshima, "Elliptic Quantum Algebra $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ and Vertex Operators", RIMS 研究集会 "超弦理論・表現論・可積分系の数理"（招待講演） 2013 年 7 月 30 日～ 2013 年 8 月 2 日 京都大学 数理解析研究所

③ H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ and Deformed W-Algebras", 国際会議 "Elliptic Integrable Systems and Hypergeometric Functions"（招待講演） 2013 年 7 月 14 日～ 2013 年 7 月 19 日 ローレンツ　センター , ライデン, オランダ

④ H. Konno and K.Oshima, "Elliptic Quantum Algebra $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ and Vertex Operators", 研究会 "第１６回 代数群と量子群の表現論" 2013 年 6 月 2 日（日）〜6 月 5 日 強羅青雲荘, 箱根

⑤ H. Konno, "Elliptic Quantum Groups, Quantum Z-Algebras and Deformed W-Algebras", 国際会議 "Infinite Analysis 2013"（招待講演） 2013 年 3 月 5 日 京都大学

⑥ H. Konno, "Elliptic Quantum Groups $U_{q,p}$ and $E_{\tau,\eta,c}$", 国際会議 "Recent Advances in Quantum Integrable Systems" 2012 年 9 月 11 日 Angers 大学（ Angers, フランス)

⑦ J-S Caux, H. Konno, M.Sorrell, R.Weston, "XXZ 模型の零質量相における２－スピノン形状因子と構造因子", 日本数学会 2011 年 10 月 1 日 信州大学

⑧ J-S Caux, H. Konno, M.Sorrell, R.Weston, "XXZ 模型零質量相の２－スピノン形状因子", 日本物理学会 2011 年 9 月 21 日 富山大学

⑨ H. Konno, "Face Models and Elliptic Quantum Groups", 国際会議 "Exactly Solvable Models in Statistical Physics" (招待講演) 2010 年 7 月 16 日 ブリスベーン, オーストラリア

６. 研究組織

(1) 研究代表者
今野　均 (HITOSHI KONNO)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 00291477

(2) 連携研究者
神保　道夫 (JIMBO MICHIO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号: 80109082

野海　正俊 (NOUMI MASATOSHI)
神戸大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 80164672

中屋敷　厚 (NAKAYASHIKI ATSUSHI)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号: 10237456

大島　和幸 (OSHIMA KAZUYUKI)
愛知工業大学・基礎教育センター・准教授
研究者番号: 30547980