

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月1日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540024

研究課題名（和文）ガロア表現の多面的研究

研究課題名（英文）Study of various aspects of Galois representations

研究代表者

田口 雄一郎 (TAGUCHI YUICHIRO)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：90231399

研究成果の概要（和文）：

ガロア表現について幾つかの有用な結果を得た。特に、剰余体が完全とは限らない完備離散附値体の幾何学的ガロア表現は、適当な状況の下、「大きい」クンマー拡大上の固定部分空間が自明になる事を証明し、これを岩澤理論に応用した。また、ガロア表現の合同について研究し、Rasmussen-玉川予想の一般化についての結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

We obtained several useful results on Galois representations. In particular, for a geometric Galois representation of a complete discrete valuation fields with imperfect residue field, we proved, under suitable conditions, that its fixed subspace over a "large" Kummer extension of the base field is trivial, and applied this to Iwasawa Theory. Moreover, we studied the congruence of Galois representations and obtained some results on the generalization of the Rasmussen-Tamagawa conjecture.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：数論、ガロア表現

1. 研究開始当初の背景

ガロア表現は現代の数論に於いて中心的役割を果たすものであり、例えばフェルマー予想、谷山志村予想、Serre 予想、Fontaine-Mazur 予想などがこれを用いて定式化されたり解決されたりしている。これまで2次元表現の場合は特に詳しく調べられて来たが、一般のガロア表現のモジュライについては、大枠の理論は構成されていたものの、細かい

事はよく分かっていなかった。本研究代表者は、今回の研究に先立つ数年間、Serre 予想の特別の場合としての「 $\text{mod } p$ ガロア表現の非存在と有限性」や Fontaine-Mazur 予想の特別の場合としての「 p 進表現の非存在と有限性」を研究して来た。その背景には、Serre 予想や Fontaine-Mazur 予想に刺激されながらも、これらの生真面目な予想よりも大らかに構えて、「どこにどんなガロア表

現がどれくらい存在しているか？」を知りたい、という着想があった。この漠然とした希望を背景に、上記の $\text{mod } p$ 表現の有限性予想 (Khare-Moon の予想) と Fontaine-Mazur の有限性予想との論理的な関係を明らかにするために、研究代表者は「ガロア表現のモジュライ」をかなり一般的な枠組みに於いて研究した。これが平成 19--21 年度の科研費 (基盤研究 (C), 研究課題名「ガロア表現のモジュライの研究」) による研究であった。本研究に入る前までに、大体の枠組み (特に moduli scheme の構成) が出来上がっていたが、しかし一方で、基本的な未解決問題 (緩い条件下での moduli scheme の有限性等) は残されていた。現在この研究自体は小康状態を保っている一方で、本研究代表者独自の研究以外にも、学生及び元学生を巻き込んだ共同研究により、有限性や非存在とは別の観点からのガロア表現の研究が進展し、幾つかの成果を挙げつつあった。

2. 研究の目的

本研究の究極的な目的は、ガロア表現のモジュライ空間の内部構造を明らかにする事である。特に、代数体や函数体の絶対ガロア群 (や、これらの体の上の代数多様体の基本群) の表現のモジュライ空間の中で、どこに、どのような表現が、どれくらい存在するのかを明らかにしたい。そのため、本研究期間に於いては、これらの表現に関する、見かけはバラバラだが根っこの部分では繋がっている幾つかの問題について、多面的な研究を展開した。具体的には、剰余体が一般の完備離散附値体のガロア表現の「大きい」クンマー拡大への制限の研究、ガロア表現の合同や特殊な形をした p 進表現の分類、その Rasmussen-玉川予想の一般化への応用、ガロア表現のモジュライ空間の有限性、その Fontaine-Mazur 予想への応用、二次体など「小さい」体の $\text{mod } p$ ガロア表現の非存在または有限性、その総実体版 Serre 予想への応用、頂切離散附値環の分岐理論、頂切離散附値環上の平坦代数の持上げ、などについて、既に着手している研究をさらに進展させるとともに、新しい手法も導入して、より深い結果が得る事が目的で

ある。

3. 研究の方法

関連諸分野の専門家との討論やセミナーを通して知見を深め、連携研究者の助けを得ながら、主に単独で研究した。セミナーは、最も基本的なものは、九州大学に於ける同僚及び学生との普段のセミナーである。これに加え、適宜連携研究者や研究協力者を招聘乃至訪問して討論した。さらに、国内外の関連する研究集会に参加・発表した。その他、科研費で購入した書籍やコンピュータ関係の消耗品も有効に活用した。

4. 研究成果

(1) K を混標数 $(0, p)$ の完備離散附値体で剰余体が本質的に有限型であるものとし、 X を K 上定義された滑らかかつ固有な代数多様体とする。 V を X (の係数体を K の代数閉包まで拡大したもの) の r 次 1 進エタールコホモロジー群とする。これには K の絶対ガロア群 G_K が連続に作用する。 M/K を K の全ての元の全ての p 冪乗根を添加して得られる拡大とする。このとき次の結果を得た:

定理. X が K 上良還元を持つならば、任意の奇数 r に対し、 V の G_M -固定部分空間 $V^{\{G_M\}}$ は自明である。

この結果は岩澤理論に応用がある。実際、既知の定理の幾つかを一般化する事が出来た。この結果は現在投稿中である。

(2) K を代数体とし、その絶対ガロア群 G_K の 1 進表現 V 達であって一定の条件を満たすものの集合 $\text{Rep}(K, u, b, e, v)$ を考える。ここに u, v は K の有限素点であり b, e は正整数 (b は Hodge-Tate 重みの上界であり e は V が半安定となるために必要な拡大体の絶対分岐指数) である。このとき、次の結果を得た:

定理. 素数 l が十分大きければ、任意の二つの $U, V \in \text{Rep}(K, u, b, e, v)$ に対し、 U と V が局所的に G_u の表現としても G_v の表現としても $\text{mod } l$ で (半単純化を除き) 合同ならば、 U と V とは局所的に G_v の表現として (半単純化を除き) 同型である。

この結果を応用する事により (ある型の捻れを持つアーベル多様体の有限性に関する) Rasmussen-玉川予想の一般化の「半安定の場合」が証明出来た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

① Yuichiro Taguchi and Toshiro Hiranouchi,

Flat modules and Groebner bases over truncated discrete valuation rings, Interdisciplinary Information Sciences 16 (2010), 33--37

[学会発表] (計 12 件)

①2011. 2. 23

局所体の Galois 表現の合同とその大域的応用, 岡山大学講演会

②2011. 6. 17

On congruences of Galois representations of function fields, Workshop on The Arithmetic of Function Fields, Imperial College London (英国), June 13--17, 2011

③2011. 8. 17

On v -adic periods of t -motives (after Mishiba), The Arithmetic of Function Fields and Related Topics, Dongguk University, Gyeongju (韓国), August 16--19, 2011

④2011. 11. 10

A generalization of a theorem of Imai, 日韓整数論セミナー、名古屋大学、2011 年 11 月 9 日~12 日

⑤2012. 5. 23

A generalization of a theorem of Imai and its applications to Iwasawa theory, Number Theory Seminar, NCTS, 清華大学、新竹 (台湾)

⑥2012. 5. 28

Finiteness theorems in number theory, Colloquium, 清華大学数学教室、新竹 (台湾)

⑦2012. 9. 13

Imai's theorem and its applications to Iwasawa theory, Colloquium, 延世大学数学教室、ソウル (韓国)

⑧2012. 9. 25

Rational torsions points of abelian varieties over a large extension of a local field, Rational points on curves: A p -adic and computational perspective, September 24--28, 2012, Mathematical Institute, University of Oxford (英国)

⑨2012. 10. 23, 25, 26 (三回講演)

On congruences of Galois representations of function fields, L -functions and Arithmetic, 延世大、ソウル (韓国), 2012 年 10 月 22 日~26 日

⑩2012. 11. 1

Rational torsion points of abelian varieties over a large extension of a local field, Colloquium at Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai (インド)

⑪2012. 11. 29

On rational torsion points of abelian varieties, Colloquium at 漢陽大学校、ソウル (韓国)

⑫2013. 3. 22

On congruences of Galois representations of number fields, Colloquium at 高麗大学校、ソウル (韓国)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ:

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~taguchi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田口 雄一郎 (TAGUCHI YUICHIRO)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：90231399

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

斎藤 毅 (SAITO TAKESHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70201506

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI TOSHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：30532551

安田 正大 (YASUDA SEIDAI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90346065

服部 新 (HATTORI SHIN)
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号：10451436

三枝 洋一 (MIEDA YOICHI)
京都大学・白眉センター/大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70526962