科研費
KAKENHI

様式 C-19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　5　月　31　日現在

機関番号：18001
研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540028
研究課題名（和文）　表現論的構造のパラメタ変形から生じる特殊関数の研究

研究課題名（英文） Study of special functions which arise from parametric deformations of representation-theoretical structures

研究代表者
木本　一史 (KIMOTO KAZUFUMI)
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：10372806

研究成果の概要（和文）： 良い不変性・対称性を持つ数学的対象として行列式と調和振動子を取り上げ、それらをパラメタによって変形したものを研究した。行列式のパラメタ変形について、パラメタの値が特別な場合、そこからある種の対称式を取り出すことが出来た。調和振動子のパラメタ変形について、そのスペクトルゼータ関数の整数点での値から現れる関数は、モジュラー形式に近い変換則を満たすことが分かった。

研究成果の概要（英文）： We have studied a parametric deformation of the determinant and the quantum harmonic oscillator, which are equipped with nice invariance and symmetries. As for the parametric deformation of the determinant, we found certain family of symmetric polynomials by using such deformations for special parameters. As for the parametric deformation of the quantum harmonic oscillator, we showed that the function which describes a certain special value of the associated spectral zeta function satisfies transformation rules similar to those for modular forms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目： 数学・代数学
キーワード： 非可換調和振動子、スペクトルゼータ関数、特殊値、α-行列式、既約分解、帯球関数

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究の立脚点となる考え方

数学的対象の一般化・類似は様々なやり方で行われるが、ここでは特に、たとえば量子群や楕円積分などに見られる「パラメタによる変形・拡張」という処方に着目する。パラメタ変形を考えるとき、そこには（たとえば元の理論で成立する定理がパラメタ変形の後にも同等の形式で成立するか、などといった）様々な問題意識がありうるが、本研究における興味は“適当な意味で対称性の高い対象に「良い」パラメタ変形を施したとき、その変形によって生じる「ずれ」を適当に定量化することで得られる「対称性の崩れ方を反映する量」は興味深い量となるであろう”という期待にある。

この期待に添うような例であると考えられる具体的な対象として、本研究においては「行列式と量子調和振動子のパラメタ変形」である「α-行列式」と「非可換調和振動子」を扱った。

以下ではまず、本研究のキーワードであるこれら「α-行列式」「非可換調和振動子」について、これまでの研究成果を交えながら、研究開始当初におけるそれぞれの背景を簡単に説明する。

(2) α-行列式について

α-行列式とは通常の行列式のパラメタ α による変形で、元々は確率論的な問題意識の下で Vere-Jones (1998) によって導入された。それは具体的には行列式の定義における符号の部分をパラメタの冪で置き換えた

$$\det{}^{(\alpha)}(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{\nu(\sigma)} x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\cdots x_{\sigma(n)n} \qquad (X = (x_{ij})_{1\le i,j\le n})$$

によって定義される。ここに $\nu(\sigma)$ は行列のサイズ n から置換 σ をサイクル分解したときのサイクルの個数を引いたものである。α-行列式は $\alpha = -1$ のときに通常の行列式となり、また $\alpha = 1$ のときにいわゆるパーマネントを与えるので、これら二つをパラメタ α で補間しているとも言える。

行列成分 x_{ij} を変数と見て、これらの変数に関する多項式環に普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$ を自然に作用させるとき、行列式とパーマネントは共に既約表現を生成する巡回ベクトルとなる。従って α-行列式の生成する巡回 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-加群の構造を調べることは“$\alpha$-行列式の行列式やパーマネントからの「ずれ」”を表現のレベルで見ることに相当すると言える。

そこで一般的に α-行列式の冪 $\det^{(\alpha)}(X)^m$ が生成する巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det^{(\alpha)}(X)^m$ の既約分解を問題にすると、m が正整数ならば各既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-加群 M ごとにある $\mathbb{C}[\alpha]$-成分の正方行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ が対応して $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det^{(\alpha)}(X)^m$ における M の重複度が $F^M_{n,m}(\alpha)$ の階数で与えられることが分かる（Kimoto-Matsumoto-Wakayama, 2009）。

一般的な場合における行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ の具体的な形は不明であるものの、いくつかの特別な場合には行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ は具体的に書き下すことが出来る。特に $n = 2$ のときには $F^M_{2,m}(\alpha)$ は常に 1 次行列（つまり単なる多項式）で、それは（M の次元から決まる）超幾何多項式を用いて書くことが出来る。

さらに、この問題の q-類似を考える、すなわち量子行列環（「行列変数」x_{ij} たちの可換性が q-変形された代数）において α-行列式の q-類似を定義し、その冪乗が量子包絡環 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$ の自然な作用によって生成する巡回加群の既約分解を考える。すると $n = 2$ の場合には超幾何多項式の q-変形を用いて同様の具体的な結果が得られる（Kimoto, 2010）。

(3) 非可換調和振動子について

次に非可換調和振動子とは、２つの実パラメタ α, β を含む行列型微分作用素

$$Q = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2\right)+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)$$

によって与えられる常微分方程式系である（Parmeggiani-Wakayama, 2002）。パラメタに関する適当な条件の下で Q はベクトル値の L^2-空間 $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の非有界な正定値自己共役作用素を定め、しかも離散固有値のみを持つ（以下、この条件を常に仮定する）。２つのパラメタの値が等

しいとき Q は調和振動子の組（の定数倍）とユニタリ同値になることから、非可換調和振動子は調和振動子の一般化・多次元化とみなすことができる。

調和振動子は生成・消滅作用素（あるいはリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の振動表現）を用いてその固有値を完全に決定できるが、一般の非可換調和振動子では具体的に個々の固有値を求めることは実質的にはほとんど不可能である。そこで固有値の全体的な振る舞いを見るものとして、固有値のディリクレ型母関数として定義されるスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ を考える（Ichinose-Wakayama, 2005）。

２つのパラメタ α, β の値が等しいときには、Q と量子調和振動子のペア（のスカラ倍）との間に具体的なユニタリ包絡作用素を作ることが出来ることから、スペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と本質的に等しくなる。つまり $\zeta_Q(s)$ は $\zeta(s)$ のパラメタ変形とみなすことが出来る。全平面への解析接続、$s = 1$ における単純極、自明な零点の存在といったいくつかの性質が $\zeta_Q(s)$ においても $\zeta(s)$ と同様に成り立つ。

このスペクトルゼータ関数の特殊値（正整数点での値）は、おおよそ「リーマンゼータ値 +($\alpha = \beta$ のとき消える項)」という形に切り分けることが出来る（Kimoto, 2010）。この「$\alpha = \beta$ のとき消える項」（以下、便宜上「剰余項」と呼ぶ）が“調和振動子と非可換調和振動子との「ずれ」”を反映する量だと考えられる。

$\zeta_Q(2)$ に対する剰余項は完全楕円積分を用いて書くことが出来（Ochiai, 2008）、さらに合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に対する重さ 1 のモジュラー形式とも密接に関係している（Kimoto-Wakayama, 2007）。剰余項はこれら以外にも様々な派生的問題を生み出す母体となっている（たとえば多重 L-値の類似; Kimoto-Yamasaki, 2009）。しかし $n \geq 3$ に対する特殊値 $\zeta_Q(n)$ に対する剰余項の構造は明らかではなかった。

以上が研究開始当初の状況である。

2. 研究の目的

以上のような背景の下、本研究は以下に示すような事項を明らかにすることを目的に掲げて開始された。

(1) α-行列式およびその q-類似の冪が生成する巡回加群の構造の明示的記述

各既約成分の重複度を与える（上述の）行列 $F^M_{n,m}(\alpha)$ の成分の具体的計算は、$m = 1$ の場合（Matsumoto-Wakayama, 2005）と上述の $n = 2$ の場合に明示的な公式の（無限）系列が得られている以外には、散発的な例の計算しかなされていなかった（q-類似の場合には $n = 2$ の場合のみ）ので、これについて

① 一般的な公式を目指しつつ、新たな明示公式の系列を得ること。
② 既に得られている場合の結果の背後にあるメカニズムの解析、すなわち特殊多項式が現れる理由を明らかにすること。
③ 背後にある表現の構造から微分方程式（や差分方程式）のような性質を導出すること。

(2) 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の「剰余項」の数論的構造の解明

スペクトルゼータ関数の特殊値は報告者によって一般的に計算されたものの、その「剰余項」の表示には改善の余地がある、すなわち $\zeta_Q(2), \zeta_Q(3)$ の剰余項は Heun 微分方程式の解を用いた積分表示や特殊関数による表示を持つことから、

① 一般の特殊値においても同様の「剰余項の良い表示」を得ること。
②「剰余項」に付随する「アペリ型数列」と呼ばれる数列に関する、様々な派生的な数論的問題（合同関係式、多重 L-値の変種、母関数のモジュラー性など）を解決すること。

3. 研究の方法

(1) 周辺研究者との議論

本研究課題の対象と関連する研究を行っている、あるいは興味を持ってくれる研究者との議論を行った。研究集会や学会への参加、他研究機関への訪問、研究者の招聘などによってそのような

機会を持った。

(2) 計算機の援用

アペリ型数列の合同関係式や母関数の満たす（微分方程式などの）関係式、リース行列式から定義される対称式の性質などを観察するために、Mathematica や Maple といったソフトウェアを利用した計算機による実験を積極的に活用した。

4. 研究成果

具体的な成果は以下の通り。

(1) α-行列式について

① 上述した重複度を記述する行列 $F^M_{m,n}(\alpha)$ は M の最高ウェイトが「フック型」のときにスカラー行列となることが示されるので、この場合は $F^M_{m,n}(\alpha)$ そのものではなく、そのトレースを見れば十分である。そこで一般に $f^M_{m,n}(\alpha) = \mathrm{Tr}\,F^M_{m,n}(\alpha)$ を調べることは（それが対称群とあるヤング部分群に対する「帯球関数」の値の母関数となることもあり）興味ある問題となる。この多項式は一般に「対称群とそのヤング部分群のペア」を決めるごとに定義される「内容多項式 (content polynomial) の一般化」に含まれる。この一般化内容多項式の具体例の計算から、いくつかの特別な場合に明示公式の予想が得られた。しかしながら証明はまだ得られていないので、今後の課題としたい。

② 特別なパラメタの値に対する α-行列式を用いて、リース行列式と呼ばれる（片側乗法性を持つ）多項式が定義される。このリース行列式を用いて、いわゆるシューア多項式の類似物を定義すると、シューア多項式が持つギャンベリ型行列式公式の類似物を満たすことを示した。他にも良い性質を持つかどうかについて、引き続き調べていく。

(2) 非可換調和振動子について

① 上述の通り、特殊値 $\zeta_Q(2)$ の剰余項を記述するアペリ型数列の母関数は合同部分群に対するモジュラー形式で書けることが分かっていたが、$\zeta_Q(4)$ の場合のアペリ型数列の母関数はモジュラー形式としては書けず、モジュラー変換則を少しずらした形の変換則を満たす（アイヒラー積分と呼ばれる、いわば負のウェイトのモジュラー形式のようなものの一般化を用いて書ける）ことを示した。これは九州大学の若山正人と共同研究である。$\zeta_Q(3)$ の場合をはじめとした他の特殊値の場合のアペリ型数列の母関数の記述については未解明であり、今後の課題である。

② 剰余項を記述するアペリ型数列はおおよそリーマンゼータ値の有理数係数一次結合として書けていることから、（リーマンゼータ値の独立性の仮定の下で）その係数として取り出した有理数部分を考えると、それらは様々な合同関係式を満たすことが数値的に観察される。この有理数部分について、University College Dublin の Robert Osburn や愛媛大学の山崎義徳らとの議論を経て、いくつかの合同関係式の予想の新たな族を得た。ただしほとんどが未証明であるので、今後の研究の中で証明を与えたい。

以上の研究について、平成 25 年度以降の科研費申請課題（「表現論的構造のパラメタ変形を通じて捉えられる特殊関数の研究」、課題番号 25400044）においても引き続き取り組み、発展・継承させていきたい。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① K. Kimoto: Representation theory for α-determinant and zonal spherical functions. Tambov University Reports 16 (2011), 1690–1698.（査読なし）

〔学会発表〕（計 3 件）

① 木本 一史，リース行列式と対称関数，2012 年度日本数学会年会（於・東京理科大学），2012 年 3 月 28 日

② 木本 一史，非可換調和振動子のスペクトルゼータ値から生じるアペリ型数列の母関数の階層構造について，2012 年度日本数学会年会（於・東京理科大学），2012 年 3 月 28 日

③ 木本 一史，若山 正人，非可換調和振動子のスペクトルゼータ値に現れる Γ(2)-モジュラー性，2012 年度日本数学会年会（於・東京理科大学），2012 年 3 月 28 日

〔その他〕

- 紀要等論文

① K. Kimoto and M. Wakayama: Spectrum of non-commutative harmonic oscillators and residual modular forms. Noncommutative geometry and physics 3 (ed. G. Dito et al.), 237–267, World Scientific, 2013.（査読有り）

② K. Kimoto: Quantum α-determinants and q-deformations of hypergeometric polynomials. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B36 (2012), 97–111.（査読有り）

③ K. Kimoto: Arithmetics derived from the non-commutative harmonic oscillator. Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis (ed. G. van Dijk and M. Wakayama), 199–210, de Gruyter, 2010.（査読有り）

- 研究集会等での講演

① K. Kimoto: Problems in the special values of the spectral zeta functions of the non-commutative harmonic oscillator. 平成 24 年度文部科学省数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワークショップ，非可換調和振動子のスペクトルと量子デバイスの数理，九州大学，2012 年 11 月

② K. Kimoto: Spectral zeta values of non-commutative harmonic oscillators and residual modular forms. Zetas and Limit Laws in OKINAWA 2012，フェストーネ（宜野湾市），2012 年 11 月

③ 木本 一史: α 行列式巡回加群と帯球関数．研究集会「表現論から見える数学の諸相」，ホテルサンパレス球陽館（那覇市），2012 年 10 月

④ K. Kimoto: Alpha determinants and symmetric polynomials. RIMS 合宿型セミナー「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」，国際高等研究所（京都府木津川市），2012 年 8 月

⑤ 木本 一史: 表現論から見た α 行列式．愛媛大学理学部数学科談話会，2012 年 5 月

⑥ K. Kimoto: Arithmetic structure of the non-commutative harmonic oscillator. Workshop on “Avoided ? Crossing of Eigenvalue Curves”，九州大学稲森財団記念館，2012 年 3 月

⑦ K. Kimoto: Quasi modularity associated to the noncommutative harmonic oscillator. Zetas and Limit Laws in Okinawa 2011，沖縄コンベンションセンター，2011 年 11 月

⑧ 木本 一史: 順序圏の表現と圏のラプラシアン．Diagram と組合せ論・表現論セミナー in 沖縄，琉球大学，2011 年 9 月

⑨ 木本 一史: リース行列式と対称関数．研究集会「表現論がつなぐ数学の展望」，ホテルサンルートプラザ名古屋，2011 年 8 月

⑩ 木本 一史: リース行列式の不変式論．第 50 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム，東京女子大学，2011 年 8 月

⑪ 木本 一史: 一般化内容多項式．九州大学 組合せ数学セミナー，九州大学，2011 年 1 月

⑫ 木本 一史: On alpha-determinant cyclic modules. 研究集会「表現論，組み合わせ論とその周辺」，琉球大学，2010 年 12 月

K. Kimoto: Apéry-like numbers associated to the non-commutative harmonic oscillator and special function. Zetas and Limit Laws in Okinawa 2010，沖縄コンベンションセンター，2010 年 11 月

⑬ 木本 一史: 非可換調和振動子のスペクトルゼータ値と特殊関数，研究集会「表現論がつなぐ数論・解析学・組合せ論」，愛媛大学，2010 年 8 月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木本　一史 (KIMOTO KAZUFUMI)
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：10372806

(2) 研究分担者

(　　　　　　　　　　)

研究者番号：

(3) 連携研究者

(　　　　　　　　　　)

研究者番号：