様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号： ３２６０６
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2013
課題番号： ２２５４００３０
研究課題名（和文） 連分数の実二次体への応用

研究課題名（英文） Application of continued fractions to real quadratic fields

研究代表者
河本　史紀（KAWAMOTO, Fuminori）

学習院大学・理学部・助教

研究者番号：５０１９５１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円、（間接経費） 750,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 河本-冨田(2012)において，数値データを使って，各周期における最小元が類数1の極小型実二次体を与えることを予想する．(2) 目標とする極小型実二次体を偶数周期の場合に構成するために，河本-岸-冨田(2014) は偶数周期の極小型自然数の構成法を与える．(3) 「末尾急増型(ELE型)主要対称部分」および「pre-ELE型有限列」という新しい概念を導入し，ELE型主要対称部分はpre-ELE型有限列から構成されることが解明される．(4) さらに「増殖分解」という新しい概念を導入し，pre-ELE型有限列の構成方法を確立する．

研究成果の概要（英文）：(1) Kawamoto-Tomita(2012) posed a conjecture by using numerical datas that the minimal element of each period gives a real quadratic field with class number 1 of minimal type. (2) We examine to construct such a field in each even period, and then Kawamoto-Kishi-Tomita(2014) gave a way of constructing positive integers with even period of minimal type. (3) By using this construction, we introduce notions of ``extremely large end (ELE)'' for a primary symmetric part and of ``pre-ELE type'' for a finite string. Then we give a way of constructing primary symmetric parts of ELE type. (4) Moreover, we introduce a notion of ``a growth decomposition'' for a finite string of pre-ELE type, and then give a way of constructing finite strings of pre-ELE type. As a byproduct, we show that there exist infinitely many real quadratic fields of minimal type in each period which is even and greater than or equal to 6.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： ガウス予想　類数　基本単数　連分数　極小型実二次体　極小型自然数　末尾急増型主要対称部分　増殖分解

１．研究開始当初の背景

（１）「類数 1 の実二次体は無限に多くあるだろう」と主張するガウス予想(1801)を解くために，河本-冨田(2008)は「極小型実二次体」、もっと一般に「極小型自然数」という概念を導入した．その概念は，実二次体全体をある実二次無理数ωの単純連分数展開の最小周期で分類し，各周期ごとにその基本単数と類数を調べるという観点に基づいている．

（２）1 億 5 千万の範囲の数値データにより，連分数による類数 1 の実二次体の無限族の抽出方法を提唱する．次に説明するように，詳しくは，各周期における最小元が類数 1 の極小型実二次体を与える． d を 4 で割り切れない平方でない自然数とする． d を 4 で割ったときの余りが 1 (resp. 2,3) のとき，l により $\omega=\sqrt{d}$ (resp. $=(1+\sqrt{d})/2$)の単純連分数展開の最小周期を表わす:

$$\omega=[a_0,\dot{a}_1,a_2,\ldots,a_{l-1},\dot{a}_{l}]$$

ここで上付点の数字の間が循環節で，部分商の並び $a_1,a_2,\ldots,a_{l-1}$ は対称性をもち，対称部分と呼ぶ．例えばいくつかの連分数展開を書くと，

$\sqrt{2}=[1,\dot{2}]$　(周期 1)

$\sqrt{3}=[1,\dot{1},\dot{2}]$　(周期 2)

$(1+\sqrt{5})/2=[1,\dot{1}]$　(周期 1)

$\sqrt{6}=[2,\dot{2},\dot{4}]$　(周期 2)

$\sqrt{7}=[2,\dot{1},1,1,\dot{4}]$　(周期 4)．

さて各周期 l におけるいくつかの d の値を小さい順に下の数表に並べる．各周期 l の最小元 d とは一番左端に並ぶ列の数である．d が 1 億 5 千万の範囲で，6 個の例外を除くと，最小元 d は類数 1 の極小型実二次体を与えている．つまり，ある種の極小型実二次体の無限族が類数 1 の体の無限族となることを予想する．

l	d				
1	2	5	10	13	・・・
2	3	6	11	15	・・・
3	17	37	62	65	・・・
4	7	14	23	33	・・・
5	41	74	149	157	・・・
6	19	22	54	57	・・・
7	58	89	109	113	・・・
8	31	71	91	135	・・・
9	73	97	106	233	・・・
10	43	57	86	115	・・・
11	265	298	541	554	・・・
12	46	103	127	177	・・・
13	421	746	757	778	・・・
14	134	179	190	201	・・・
15	193	281	281	1066	・・・
16	94	191	217	249	・・・
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・

（３）ωの単純連分数展開の循環節に対称部分が現れるが，逆に対称部分を与えて実二次無理数ωを構成できる．これは河本-冨田(2008)で与えた，Friesen と Halter-Koch の結果の改良である．その構成法により周期が固定されたとき，その周期を取る実二次無理数ωが原理的に構成可能となる．これは我々の基本的道具である．

２．研究の目的

上で述べた目標とする極小型実二次体の構成方法を考案することが目的である．すなわち，各周期の最小元を構成する方法を見つけ，それが与える実二次体の類数が 1 となることを証明したい．

３．研究の方法

（１）理論面の考察と数値実験を同時に行うことが大事なポイントである．数値実験の結果が理論的発展を促し，さらに理論的発展が新たな数値実験を促す．

（２）研究分担者 冨田の主導の下で整数論用計算ソフトPARI-GP による計算機での数値実験を行った．とくに数値データベース拡充のために2012年度の補助金を使ってワークステーション(HP Z620)を購入した．

（３）目標とする極小型実二次体を構成するために，いくつかの状況から，まず偶数周期の場合を扱うのが適切であることに気付く．それ以後は，偶数周期の場合の考察に集中した．

（４）途中から、研究打ち合わせおよびセミナーへ岸氏と鈴木氏に参加してもらう．これは研究の進展を促すことになる．とくに2013年度は9回のセミナーを行った．

４．研究成果

（１）河本-冨田，Tokyo J. Math. (2012) を出版する．d が５億の範囲までの数値データを使って，上で述べた，ある種の極小型実二次体の無限族が類数１の体の無限族となるという予想を提示する．

（２）数値データベース拡充のために 2012 年度の補助金を使ってワークステーション(HP Z620)を購入し，研究分担者 冨田が所属する名城大学に設置したが，d が８億の範囲まで数値データが集まり，7 億の数値データの解析が終わる．提示した予想に変更はない．

（３）河本-岸-冨田，Proc. Japan Acad. (2014) を出版する．偶数周期の極小型自然数の構成方法を与える．

（４）この論文の結果を使って，「末尾急増型(ELE 型)主要対称部分」および「pre-ELE 型有限列」という新しい概念を導入し，ELE 型主要対称部分は pre-ELE 型有限列から構成されることが解明される．主要対称部分とは連分数展開における対称部分の前半を指す． ELE 型主要対称部分の定義はすぐに出来ないが，この概念が重要であることを d が７億の範囲の数値データで見る．
l が８以上 60306 以下の偶数のとき，各周期 l の最小元 d に対して次のことが例外なく成り立っている：

・d は平方因子をもたない．
・d が与える実二次体の類数は１である．
・d が与える実二次体は極小型である．
・$\sqrt{d}$の連分数展開における主要対称部分は ELE 型である．

このように目標とする体が偶数周期の場合，ELE 型かつ極小型実二次体となることが予想される．
なお，Golubeva(1993)による pre-ELE 型有限列に関する先駆的な結果に気付く．彼女の仕事に示唆されて，ELE 型主要対称部分をもつ極小型自然数の特徴付けが見つかる．河本-岸-冨田の共著論文として現在投稿中である．

（５）「増殖分解」という新しい概念を導入し，pre-ELE 型有限列の構成方法を確立する．副産物として，6 以上の各偶数周期において極小型実二次体は無限個存在することがわかる．さらにこの体の無限族は類数と基本単数の情報も含んでいる．河本-岸-鈴木-冨田の共著論文として現在投稿中である．
したがって，各偶数周期の最小元に ELE 型主要対称部分が現れることを確かめ，その pre-ELE 型有限列の増殖分解が明らかになると，類数１の実二次体の１つの構成法に迫れる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

①河本 史紀、冨田 耕史、Continued fractions and Gauss' class number problem for real quadratic fields、Tokyo J. Math.、査読有、35 巻、2012、213-239
DOI:10.3836/tjm/1342701351

②河本 史紀、岸 康弘、冨田 耕史、Construction of positive integers with even period of minimal type、Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.、査読有、90 巻、2014、27-32
DOI:10.3792/pjaa.90.27

〔学会発表〕（計３件）

①河本 史紀、冨田 耕史、連分数と類数１の実 2 次体について～ある数値実験の報告～、日本数学会秋季総合分科会、2010 年 9 月 25 日、 名古屋大学

②河本 史紀、岸 康弘、鈴木 浩志、冨田 耕史、偶数周期の連分数展開と末尾急増型主要対称部分、日本数学会秋季総合分科会、2013 年 9 月 23 日、 愛媛大学

③河本 史紀、岸 康弘、鈴木 浩志、冨田 耕史、末尾急増型主要対称部分の構成法～pre-ELE 型有限列の増殖変換～、日本数学会秋季総合分科会、 2013 年 9 月 23 日、 愛媛大学

〔その他〕

ホームページ等

http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/FSNT/10/006-kawatomi.pdf

河本 史紀、冨田 耕史、極小型実2次体と2つの有名予想、 第5回福岡数論研究集会(2010)報告集、2011、45-73

６．研究組織

(1)研究代表者

河本 史紀（KAWAMOTO, Fuminori）

学習院大学・理学部・助教

研究者番号： ５０１９５１６１

(2)研究分担者

冨田 耕史（TOMITA, Koshi）

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：５０３００２０７

(3)連携研究者

岸 康弘（KISHI, Yasuhiro）

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：６０３８０３７５

鈴木 浩志（SUZUKI, Hiroshi）

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：７０２３５９９３