

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540032

研究課題名(和文)非可換なガロア群を持つ代数体と被覆の計算的研究

研究課題名(英文)A computational research on number fields and coverings with non-commutative Galois groups

研究代表者

角皆 宏 (Tsunogai, Hiroshi)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：20267412

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：非可換な有限群をガロア群とするガロア拡大を具体的に取り扱うことを主眼として研究した。6次可移群の複比型ネーター問題については、2つの非可解可移部分群を除いて肯定的な結果を得た。複比の体と差の比の体との固定体の間の相対的有理性については、対称群の場合には奇数次では肯定的であり偶数次では否定的であることを示し、偶数次の幾つかの場合にも否定的な結果を得た。種数1で6次のデッサンについては1つの価数リストを除いて定義方程式を決定し、この範囲では既知の不変量が一致するデッサンは全てガロア共役であることが判った。また、生成的多項式を用いて、与えられた惰性条件を満たす代数体の存在・非存在に関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Our research intends to study Galois extensions with non-commutative Galois groups concretely. On Cross-Ratio Noether Problem for transitive groups of degree six, we obtained affirmative answers with explicit generators except two non-solvable subgroups. On Relative Rationality between the fixed fields of the fields of cross-ratios and the fields of ratios of differences, for the cases of the symmetric groups, it was shown to be affirmative for odd degrees and to be negative for even degrees. We also obtained negative answers for some subgroups of the symmetric groups of even degrees. We determined the defining equations of the dessins d'enfants of genus one of degree six except one valency list, and confirmed that known Galois invariants of dessins distinguish their Galois orbits in these cases. We showed the existence and non-existence of number fields with given prime inert conditions by means of generic polynomials.

研究分野：整数論

キーワード：整数論 代数学 ガロア理論 アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

代数的整数論において、所与の代数体と有限群とに対し、その群をガロア群に持つ拡大体を統制することは、最も基本的な問題の一つであるが、非可換群に対しては未だに満足できる包括的な一般論があるとは言えず、今日なお実験的な観察・研究も意義が大きい。

(1) 特に非可換な有限群をガロア群とするガロア拡大の構成手法として、ネーターの問題「有理関数体に有限群が変数の置換で作用する時、その固定体が再び有理的であるか」及びその一般化は有力な処方であるが、個々の有限置換群の性質に依存する極めて非自明な問題であり、特に非可解群に関して知られている非自明な結果は極めて少ない。

(2) 代数体のガロア拡大の構成では、代数多様体のガロア被覆を考えることも有力である。射影直線の3点分岐被覆はその最も基本的かつ豊富な対象で、デッサンと呼ばれるグラフで表される。射影直線間の被覆である種数0のデッサンについては計算も容易であり、組織的・網羅的な研究も進んでいるが、一方で、正種数のデッサンについては網羅的な研究が余り進んでいない。

(3) 生成的多項式の具体的な構成は代数的整数論に多くの有用な具体例を提供する。既に知られている群に対しても、より簡潔な係数を持つ生成的多項式を得ることは、分岐の統制や単数の構成など整数環上の性質を考察する上で意義が大きい。

2. 研究の目的

非可換群をガロア群に持つ代数体の拡大(非可換ガロア拡大)や代数多様体の被覆(非可換ガロア被覆)について、主に明示的な例の構成や実験的な計算により、上記に関する具体的な知見を得るとともに、代数的整数論の研究において計算できる事例を提供することを目的とする。

(1) ネーターの問題の一般化のうち、変数の複比が生成する体に関して、変数への置換で有限置換群が作用している時の固定体の有理性を問う「複比型ネーター問題」に取り組む。
①位数の小さい非可解群の場合を目標に、6次可移置換群の場合など、様々な置換群に対してなるべく統一的に論ずる。
②変数の複比の体と変数の体との固定体の間の相対的有理性に関して明らかにする。これが肯定的なら複比型ネーター問題から元々の置換ネーター問題が従う。

(2) 代数多様体の被覆を通じて、代数体のガロア群の表現を具体的に考察する。

①正種数のデッサンについて、その定義方程

式を明示的に求めるための組織的な方法を確立する。具体的には種数1の6次の場合に定義方程式を明示的に求め、そのガロア軌道を明らかにする。

②多項式の分解式に関連するモジュライ空間の間の射について、低次の場合に単発的に知られていることを、一般の分解式について大きな枠組の中で捉える。

(3) 簡明な生成的多項式を具体的に構成し、その応用として整数環上の性質を探求する。

①複比型ネーター問題から構成された生成的多項式は簡潔な係数を持つことが多く、特殊化により単数を根とした多項式が得られることもある。その仕組みについて詳しく解明し、様々な場合に簡潔な係数を持つ生成的多項式を得る手法を確立する。

②生成的多項式の助変数を特殊化する値と素数の分解の関係について、既に知られているよりも高次の生成的多項式でも考察し明らかにする。

3. 研究の方法

一般的な数学の研究と同様に、個別の研究に加えて定期的・不定期的なセミナーによる共同研究を行ない、年に数回は関連分野の研究集会に参加して、情報交換や議論を行なう。個別の研究では計算機による数式処理を活用する。商用数学ソフトウェア Maple の他、Pari/GP, GAP などオープンソースの数学ソフトウェアも多く利用する。最終的に整理されて手計算でも確認できるような簡明な表示を得ることが望ましいが、それまでには大きな計算機資源と計算時間・試行錯誤・深い洞察力が不可欠である。中心的な計算機としては大学所有の大容量メモリを搭載した大型計算機を主に用い、補助的にノートPCを用いてセミナー時においても活用する。一部の研究は研究補助者の大学院生と共に進める。研究補助者も含めた態勢の強化については、主に学内の研究分担者と協力して行なう。

(1) 複比型ネーター問題については、幾何的な由来である標点付射影直線のモジュライ空間の関数体への置換群の作用に着目する。
①特に6次交代群を含む非可解可移群の場合を目標に、6次可移置換群について、互いの包含関係を辿ってなるべく統一的に論ずる。その後、引続き7次置換群の場合を目指す。
②変数の複比の体と差の比の体との固定体の間の相対的有理性に着目し、特に次数の偶奇による状況の違いを考察する。

(2) 代数多様体の被覆の中でも、正種数のデッサンやモジュライ空間の間の射について考察する。

①正種数のデッサンの計算では、種数1で6次で完全分岐する点がない場合に、群論的な不変量を用いて分類した後、計算代数ソフト

ウェアを活用して定義方程式を明示的に求め、そのガロア軌道を明らかにする。より高次のデッサンについては比較的簡単に求まる場合の観察に留めて、群論的な不変量の考察を主に行なう。特に、種数1で2点完全分岐するデッサンについて組織的に扱う方法を考察し、既知の結果の再整理・簡明化にも役立つ。

②多項式の分解式に関連するモジュライ空間の間の射については、4次多項式のFerrari分解式が定める4次から3次への射の場合と同様な手法を、5次多項式のWeber分解式が定める5次から6次への射に適用して考察し、一般の分解式についての手掛かりとする。

(3)変数の複比の体への置換群の作用を考察することにより、簡明な生成的多項式を構成し、それを応用することを目指す。

①複比型ネーター問題から構成された生成的多項式は簡潔な係数を持つことが多いので、その仕組みについて詳しく解明し、様々な場合に簡潔な係数を持つ生成的多項式を得る手法を確立する。特に、5交代群の場合には6次・10次で単数を根とする生成的多項式を得ているので、この仕組みをより明らかにすることで、6次置換群などの場合にも同様の多項式を得ることを目指す。

②簡明な生成的多項式を利用して、助変数を特殊化する値と根体や分解体に於ける素数の分解の関係について考察し、素数の分解様式を指定した代数体の存在・非存在の問題に応用する。

4. 研究成果

(1)複比型ネーター問題に関して：

①6次可移群の複比型ネーター問題については、全ての可解可移部分群と6次対称群自身および可移な5次対称群については肯定的な結果を得た。特に6次対称群の場合を除いては、統一的な道具立ての下で互いに関連した形で固定体の生成元を具体的に得ることが出来た。早稲田大学の橋本喜一郎氏との共著で、これらの結果を整理してまとめ、原著論文格の査読つき国際集會報告集に掲載・出版された(論文③)。6交代群および可移な5交代群については、非常に大きな計算が必要となり、解決には至らなかった。

②複比の体と差の比の体との固定体の間の相対的有理性問題については、次数の偶奇で全く状況が異なり、対称群の場合には、奇数次では肯定的であり、偶数次では否定的であることが判った(論文⑦)。奇数次の場合にはこれより全ての置換群に対して肯定的であることが従う。偶数次の場合には一般には不明だが、特定の巡換型の元を含む置換群については否定的であることが判った。2冪次の場合には全ての可移群がこの条件を満たし否定的となる。また6次の場合にはこの条件を満たさない可移群もあるが、個別の計算

により全ての可移群に対して否定的であることが判った。以上の結果をまとめ現在投稿中である。

③その他、与えられた置換群を根の置換として実現するような多項式の構成法や、6次ネーター問題における外部自己同型の作用との関係についても取り組んだが、まだ萌芽の段階であり、発表には至っていない。

(2)代数多様体の被覆を通じた研究：

①種数1で6次で完全分岐する点がある場合、および完全分岐する点はないが幾何的な対称性を利用して種数0のデッサンの計算に帰着できる場合については、全ての定義多項式を計算し、そのガロア軌道を決定した。その結果、この範囲では、既知の不変量(価数リスト・モノドロミー群・ニールセン類・カルトグラフィック群・自己同型群)が一致するデッサンは全てガロア共役であることが判り、この段階までを中間報告的に発表した(論文④)。種数1で6次で完全分岐する点

がなく、しかも幾何的な対称性がない場合は、未定係数法により得られる多変数高次の連立方程式が不可避なため非常に計算が困難である。このうち、不変量による分類により定義体が高々実2次体であることが判る2つの価数リストについては、定義体で分岐する可能性のある素数などの数論的情報と、近似計算とを併用することにより、定義方程式を決定することができた。この場合も既知の不変量が一致するデッサンは全てガロア共役であった。これで残る未解決な場合は価数リスト[51;51;42]のみとなったが、この場合は定義体が4次体になる可能性があり、より高精度の近似計算や詳しい数論的情報が必要になると思われる。また、種数1で2点完全分岐なデッサンについては、すべて幾何的な対称性を利用して種数0のデッサンの計算に帰着できることが判った。これについては、近年の関連研究との関係について検討する必要があり、発表には至っていない。

②多項式の分解式に関連するモジュライ空間の間の射については、5次多項式のウェーバー分解式が定める5次から6次への射について、4次多項式のフェラーリ分解式が定める4次から3次への射に関する先行研究の類似を意図したが、同様にはいかない部分があることが判明し、今後の研究課題となった。

(3)生成的多項式の構成と応用：

①複比やその積を根とする多項式の統一的な構成に関して、対称群の部分群対に対し、変数の複比の積からなる或る性質を満たす元のシステムを定義した。これを用いると適切な条件下で定数項が ± 1 となる生成的多項式が得られる。 n 変数の複比が生成する乗法群への対称群の作用が $[n-2, 2]$ 型のヤング図形に対応する既約表現となることから、有限群の表現論を援用して、本構成法により所望の多項式が得られる可能性のある6次対称群

の部分群対を決定した。その後、多項式の明示的な構成に臨んだが、多くの場合は計算が困難で、具体的な結果を得たのは比較的簡単な場合のみに留まった。これについては経過報告的な口頭発表を行なった。

②研究分担者の小松亨氏を中心となり、生成的多項式の数論的性質を解明し、非可換なガロア群を持つ代数体の数論的分析に活用する方法を研究考察した。生成的多項式に関する計算機実験から観察された数論的性質を研究・応用し、与えられた惰性条件を満たす代数体の存在・非存在に関する結果を得た。高次の場合については数表を利用した大規模な計算機実験を必要とする既存の方法では限界があったが、群論的分析を詳細に行なって小さい計算に問題を還元することで、未解決の場合の幾つかについて結果を得ることができた(論文①)。また、従来の結果の部分的な拡張として、虚2次体の組の無限族における或る条件を満たす不分岐拡大の存在を、所望のイデアル類を具体的に構成する手法により示した。

(4)その他、研究分担者を中心として進めた研究として、五味靖氏が有限群の表現論の観点から有限体上のガウス和の一般化として有限コクセター群上やA型岩堀ヘッケ環上にガウス和を定義し、また都築正男氏が保型L関数の値に関して考察して、それぞれ結果を得た(論文②⑤⑥)が、本研究の中心的な課題と直接結びつくには至らなかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① T. Komatsu, Restriction on Galois groups by prime inert condition, Math. J. Okayama Univ. (掲載決定済), 査読有
 - ② M. Tsuzuki, Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on $SO_0(m, 2)$ I, J. Number Theory 132 (2012), no. 11, 2407-2454, 査読有
 - ③ K. Hashimoto, H. Tsunogai, Noether's problem for transitive permutation groups of degree 6, Adv. Stud. Pure Math. 63 "Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry" (2012), 189-220, 査読有
 - ④ 角皆 宏、種数1のGrothendieck dessinの計算、京都大学数理解析研究所講究録1813「多重ゼータ値の諸相」(2012), 167-182, 査読無
 - ⑤ Y. Gomi, T. Maeda, K. Shinoda, Gauss sums on finite groups, Tokyo J. Math. 35 (2012), no. 1, 165-179, 査読有
 - ⑥ M. Tsuzuki, Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair II, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), no. 3, 1039-1084, 査読有
 - ⑦ 角皆 宏、Noether 問題の紹介とそれに関連する体拡大の有理性問題について、第8回北陸数論研究集会報告集(2010)、1-19、査読無
- [学会発表] (計 19 件)
- ① 小松 亨、Belyi 射について、関西多重ゼータ研究会、2014年9月12日、京都産業大学(京都府)
 - ② 小松 亨、与えられた位数のイデアルをもつ虚2次体の組について、第13回仙台広島整数論集会、2014年7月17日、東北大学(宮城県)
 - ③ 角皆 宏、Belyi 射と dessin d'enfants について、神楽坂代数セミナー、2013年12月16日、東京理科大学理学部(東京都)
 - ④ 小松 亨、類数がともに n で割り切れる虚2次体 $Q(\sqrt{D}), Q(\sqrt{mD})$ について、北陸数論セミナー、2013年11月21日、金沢大学サテライトプラザ(石川県)
 - ⑤ 角皆 宏、Noether 問題とその変種、Workshop on Galois point and related topics、2013年9月14日、山形大学(山形県)
 - ⑥ 小松 亨、代数体の惰性条件によるガロア群の制限について、愛知数論セミナー、2013年6月15日、愛知工業大学(愛知県)
 - ⑦ Y. Gomi, q-analogue of Gauss sums on the symmetric groups, The 55th KPPY Combinatorics Seminar, 2013年3月23日、Yeungnam University (韓国)
 - ⑧ 五味 靖、対称群上の Gauss 和の q 類似、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会、2012年9月19日、九州大学(福岡県)
 - ⑨ 都築 正男、保型形式の周期の平均分布、第57回代数学シンポジウム、2012年8月23日、京都大学(京都府)
 - ⑩ 都築 正男、On a spectral average of central L-values of holomorphic cusp forms on $SO(m, 2)$ 、L-functions of automorphic forms and related problems、2012年3月13日、東京大学(東京都)
 - ⑪ T. Komatsu, On the existence of number fields with certain prime conditions, Hawaii Conference in Algebraic Number Theory, Arithmetic Geometry and Modular Forms, 2012年3月7日、ハワイ大学マノア校(アメリカ)
 - ⑫ T. Komatsu, On inverse Galois problem with certain prime conditions, AMS Sectional Meeting AMS Special Session, 2012 Spring Western Section Meeting, 2012年3月4日、ハワイ大学マノア校(アメリカ)
 - ⑬ 角皆 宏、6次複比型 Noether 問題から面白い多項式族を構成する試み、下関数論小研究集会、2011年8月23日、東亜大学(山口県)

- ⑭ 都築 正男、Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on the type IV symmetric domain、第 6 回福岡数論研究集会、2011 年 8 月 23 日、九州大学（福岡県）
- ⑮ 角皆 宏、dessin d'enfant の紹介と計算例、第 49 回可換代数研究集会、2010 年 12 月 29 日、上智大学（東京都）
- ⑯ M. Asada, H. Nakamura, N. Takao, H. Tsunogai, Easy walking in GT theory and anabelian geometry (I), (II), Development of Galois-Teichmüller Theory and Anabelian Geometry (2010 年度日本数学会季期研究所), 2010 年 10 月 25 日、京都大学数理解析研究所（京都府）
- ⑰ 筱田 健一、五味 靖、前田 大貴、Gauss sums on finite groups、日本数学会 2010 年度秋季総合分科会、2010 年 9 月 22 日、名古屋大学（愛知県）
- ⑱ 角皆 宏、種数 1 の Grothendieck dessin の計算、研究集会「多重ゼータ値の諸相」、2010 年 9 月 9 日、京都大学数理解析研究所（京都府）
- ⑲ 小松 亨、生成的多項式の数論的実用について、日本応用数理学会 2010 年度年会、2010 年 9 月 8 日、明治大学（東京都）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

角皆 宏 (TSUNOGAI, Hiroshi)
 上智大学・理工学部・教授
 研究者番号：20267412

(2) 研究分担者

都築 正男 (TSUZUKI, Masao)
 上智大学・理工学部・准教授
 研究者番号：80296946

五味 靖 (GOMI, Yasushi)
 上智大学・理工学部・准教授
 研究者番号：50276515

梅垣 敦紀 (UMEGAKI, Atsuki)
 愛知大学・国際コミュニケーション学部・准教授
 研究者番号：60329109

小松 亨 (KOMATSU, Toru)
 東京理科大学・理工学部・講師
 研究者番号：10403974

中筋 麻貴 (NAKASUJI, Maki)
 上智大学・理工学部・准教授
 研究者番号：30609871
 （平成 26 年度のみ）

(3) 連携研究者

陸名 雄一 (RIKUNA, Yuichi)
 電気通信大学・情報理工学部・准教授
 研究者番号：10434309
 （平成 22～23 年度）

星 明考 (HOSHI, Akinari)
 立教大学・理学部・助教
 研究者番号：50434262
 （平成 22～23 年度）