

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 9 月 25 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540033

研究課題名(和文) 保型形式の周期と L 関数の特殊値の平均分布

研究課題名(英文) Periods of automorphic forms and distribution of average of special values of L-functions

研究代表者

都築 正男 (Tsuzuki, Masao)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：80296946

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000 円

研究成果の概要(和文)：(1)一般総実代数体上の正則ヒルベルト保型形式の標準 L 関数とそれを 2 次指標で捻じった L 関数(あるいはその一回微分)の積の中心値に関して相対跡公式を明示化し、佐武パラメーターの一様分布や L 関数中心値の新しい明示的劣凸評価などへの応用がえられた。

(2) I V 型対称領域で定義されたスカラー値正則保型形式のフーリエ係数のある定符号直交群の類群指標による重み付平均に関して、従来知られていた楕円モジュラー形式やジークルモジュラー形式の場合と整合する適切な正規化を提案した。この正規化平均フーリエ係数の 2 乗と標準 L 関数の中心値の積を解析するのに有用な和公式を証明した。

研究成果の概要(英文)：(1) We studied the product of central values of standard L-function and their quadratic twist(or its first derivative) associated with holomorphic Hilbert modular forms over a general totally real number field. We developed an explicit relative trace formula whose spectral side encodes such quantities and obtained several applications, which include the equidistribution of Satake parameters of automorphic representations and explicit subconvex exponent of certain central L-values in the weight aspect.

(2) We studied the holomorphic scalar valued cusp forms on type IV bounded symmetric domain from the aspect of their Fourier coefficients. We proposed a good normalization of certain weighted average of Fourier coefficients, which is compatible to known normalizations of classical modular forms. We developed a certain summation formula whose spectral side encodes the square of the normalized Fourier coefficients and the central values of the standard L-functions.

研究分野：整数論

キーワード：L 関数特殊値 保型形式の周期 相対跡公式

1. 研究開始当初の背景

当該研究着手以前の背景としては次の2点があった:(1) 当該研究代表者と織田孝幸氏との共同研究によって、分裂ランク1の対称対に付随するグリーン関数の超幾何関数による具体的構成と、その対称対が定義する数論的多様体上のサイクルに対する保型グリーンカレントの構成が知られていた。この研究で明らかとなった保型グリーンカレントのスペクトル展開は、高次元の算術多様体の数論幾何的な問題への応用をもつ。(2) 当該研究代表者の2006年度から2009年度に亘る基盤研究(C)の補助を得た一連の研究で、保型グリーンカレントをセルバーグ跡公式の核関数の類似物と見なしスペクトル展開とは別の「幾何的展開」を導くことで、ジャッケが保型表現の移送問題にあたって導入した相対跡公式の一つの変種をより幾何学的状況で導き数論的基本群を持つ多様体上のサイクルの幾何へのいくつかの応用が得られていた。

以上(1)(2)で述べた研究で得られた方法論を、ゼータ関数が大きく関わる数論的な状況に適用し、保型形式の周期積分に関連する保型的L関数の特殊値の理解に応用できないか、というのが当該研究を立案する主な契機であった。

2. 研究の目的

Gを代数体上の簡約代数群、Hをその簡約部分群とする。Gのアデル群のカスプ表現を生成する保型形式のHのアデル軌道に沿った不変積分は、(一般化された意味での)周期積分と呼ばれる。保型形式の周期は保型L関数の特殊値と深い関連がある。当該研究では、有限素点での固定された同一系列の既約表現を生成する保型形式の集合など、適切に設定された保型形式の無限族を離散的な標本空間と見なし、周期やL関数の特殊値の2乗分布関数に注目する。当該研究の目的は、グリーン関数による相対跡公式へのアプローチを主軸にして、この分布関数の無限遠における漸近挙動を明らかにすることにあった。

3. 研究の方法

さまざまな素点で考えた対称空間上の特殊関数を使って、代数群Gのアデル空間上に明示的にグリーン関数を定義し、それをGの有理点に亘って平均化することでアデル的保型グリーン関数を構成し、スペクトル展開・(G, H) 両側剰余類の分類に沿った展開の2つの側面を考察する。保型グリーン関数をテスト関数によって適切に平滑化した

関数が出発点である。上記2つの側面を踏まえて、平滑化したグリーン関数を部分群Hのアデル軌道に沿った不変積分を2通りに計算することで相対跡公式を導出する。適切にテスト関数を選択することで、周期積分の2乗分布関数を調べる。

4. 研究成果

主に3つの成果が得られた。

一般の総実代数体を基礎体とする代数群PGL(2)上のヒルベルト保型形式の標準L関数およびその2次指標による捻りの中心特殊値を研究対象とする。保型形式のPGL(2)の対角的分裂トーラスに沿った周期積分2つの積のヘッケ固有値加重平均をスペクトルサイドに持つような相対的跡公式を明示的に書き下し、応用として次のような結果が得られた。

与えられた正数以下のラプラス固有値を有する実解析的カスプ形式の標準L関数中心値の2乗平均誤差項付漸近公式

平方自由変動レベルを持つ実解析的カスプ形式のスペクトルパラメーターに対する標準L関数中心値による重み付一様分布定理

任意変動レベルを持つ正則ヒルベルトカスプ形式のスペクトルパラメーターに対する標準L関数中心値による重み付一様分布定理

任意変動重さを持つ正則ヒルベルトカスプ形式の2次基底変換の標準L関数中心値に対する明示的な劣凸評価式

上記の結果は学術論文としてMemoire of AMSにて出版済である。

は杉山真吾氏との共同研究であり、既に2編の研究論文を完成し専門雑誌に投稿中である。

IV型対称領域の正則自己同型群の定める直交群上で定義された不分岐正則カスプ形式のフーリエ・ベッセル係数と標準L関数の中心特殊値を研究対象とする。この研究では、フーリエ・ベッセル係数の2乗と標準L関数中心値の積をスペクトルサイドとする和公式を構成した。その研究過程およびその応用として次の2つの結果が得られた。

動重さを持つスカラー値正則カスプ形式のフーリエ・ベッセル係数の平方と標準L関数中心値の積に対する平均値定理。この定理を示すにあたっては、フーリエ・ベッセル係数の適切な正規化が不可欠であるが、古典的

な正則保型形式に対しては知られていた正規化と整合する正規化がこの研究を通じてわかった。

直交群上のスカラー値正則新谷関数の構成法、重複度 1 定理とその明示公式。直交群上の新谷関数の研究は、連携研究者である森山氏が 5 次の直交群で行ったものしか知られていなかったと思われる。ここで得られた成果は、スカラータイプを有する正則離散系列に限定はされるものの、正則 I V 型領域に対応する一般の直交群上で通用することを強調したい。この結果は副次的ではあったが、応用可能性はもっと広いものがあると期待される。

これらの結果の一部は学術論文として J.Number Theory 132 (2407-2454) に掲載済である。

これは研究分担者の得た成果である。標点付射影直線のモジュライ空間への置換群の作用の研究として、複比型ネーター問題に取り組み、特に 6 次の場合に、いくつかの困難な場合を除いては、早稲田大学の橋本喜一郎氏との共著論文としてまとめ、査読付き国際研究集会報告集に掲載済である。また、標数 0 におけるモジュラー単数の類似物として複比をとらえる観点から、それらを根とする多項式の具体的構成に取り組み、口頭発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

— Masao Tsuzuki, Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair II, J. Math. Soc. Japan 63, (2011) 1039-1084.

— Masao Tsuzuki, Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on $SO(m,2)$ I, J. Number Theory 132 (2012), 2409-2454.

— Masao Tsuzuki, Spectral square means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$, Memoirs of the AMS, 235 No.1110 (2015).

— Kiichiro Hashimoto, Hiroshi Tsunogai, Noether's problem for transitive permutation groups of degree 6, Advanced Studies in Pure Mathematics 63, 2012, Galois Teihimuller Theory and Arithmetic Geometry, 189-220.

[学会発表](計 4 件)

— Tsuzuki Masao, On a spectral average of central L-values of holomorphic cusp forms on $SO(m,2)$, L-functions of automorphic forms and related problems (2012 年 3 月 23 日、東京大学)

— Tsuzuki Masao, Relative trace formulas and spectral average of period integrals, 国際研究集会「ゼータ関数」2012 年 9 月、東京工業大学

— Tsuzuki Masao, Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on $SO(m,2)$ (第 6 回福岡整数論研究集会 2011 年 8 月 24 日、九州大学)

— Tsuzuki Masao, Spectral square means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$ (RIMS 研究集会「保型形式と関連する跡公式、ゼータ関数の研究」2011 年 1 月 20 日、京都大学数理解析研究所)

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
(1) 研究代表者

上智大学・理工学部・教授
都築正男 (TSUZUKI, Masao)
研究者番号：80296946

(2)研究分担者
上智大学・理工学部・教授
角皆宏 (TSUNOGAI, Hiroshi)
研究者番号：20267416

(3)連携研究者
大阪大学大学院理学研究科・准教授
森山知則 (MORIYAMA, Tomonori)
研究者番号：8038171