様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４００４０

研究課題名（和文）特異点として尖点のみを持つ平面曲線の研究

研究課題名（英文）On plane algebraic curves having only cusps as their singular points

研究代表者
戸野　恵太（TONO, Keita）

埼玉大学・理工学研究科・非常勤講師

研究者番号：３０４２２２１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：複素射影平面上の代数曲線で特異点として局所的に既約なものだけを持つものを尖点平面曲線と呼ぶ。尖点平面曲線Cの特異点の極小埋め込み解消による曲線の固有変換をC'と書く。この研究ではまず種数が２で特異点を一つ持つ尖点平面曲線CについてC'の自己交点数に関するいくつかの結果を得た。次に特異点を二つ持つ有理尖点平面曲線CでC'の自己交点数が－１であるものを分類した。続いて特異点を３個以上持つ有理尖点平面曲線CについてC'の自己交点数の上界を与えた。さらに特異点を３個持つ有理尖点平面曲線CでC'の自己交点数が上界に等しいものを決定した。

研究成果の概要（英文）：A plane algebraic curve is called cuspidal if it has only cusps as its singular points, where by a cusp I mean a locally irreducible singular point. For a cuspidal curve C on the complex projective plane let C' denote the proper transform of C via the minimal embedded resolution of the cusps. I obtained some results concerning the self-intersection number of C' for cuspidal plane curves C of genus two having only one cusp. I classified the rational cuspidal plane curves C having two cusps such that the self-intersection number of C' is equal to -1. Then I obtained an upper bound of the self-intersection number of C' for the rational cuspidal plane curves C having at least 3 cusps. Moreover, I determined the rational cuspidal plane curves C having 3 cusps such that the self-intersection number of C' is equal to the bound.

研究分野：代数幾何学

キーワード：平面曲線　特異点

１．研究開始当初の背景
平面代数曲線については古くから研究がなされており既に多くのことが知られているが、それらの多くは曲線全体を対象としたもので、個別の曲線について分からないことが多い。例えば平面代数曲線論の諸定理を満たす曲線の次数や特異点の情報等のデータが与えられた時、そのようなデータを持つ曲線が実在するかどうかを知ることは一般に困難である。
ところが有理尖点平面曲線、すなわち局所的に既約な特異点のみを持つ有理平面代数曲線に限れば事情が変わる。特に曲線の補集合の対数的小平次元が１以下の場合には詳細かつ具体的な分類結果があり、上記の問に答えることができる。また一般に平面曲線は次数を上げればいくらでも多くの特異点を持ち得るが、有理尖点平面曲線は９個以上の特異点を持つことができないことを研究代表者自身が示した。有理尖点平面曲線はここに挙げた以外にもいくつかの興味深い性質を持ち、今後も研究の進展が期待できると考えた。
これまでの研究結果から有理尖点平面曲線が持つよい性質のいくつかは有理曲線という条件ではなく特異点として尖点のみを持つことに起因するとの感触を得ていた。そこで楕円尖点平面曲線や、より種数の大きい尖点平面曲線も有理尖点平面曲線と同様の性質を持つのかどうかを明らかにしようと考え、この研究課題の着想に至った。また研究が進みつつある有理尖点平面曲線についても、依然として不明な点があるのでこれ自体も研究対象とした。

２．研究の目的
(1) 有理尖点平面曲線
任意の有理尖点平面曲線がクレモナ変換で直線に写されるのかどうかを明らかにすることを１つ目の研究目的にした。この問題は古くから肯定的な予想がなされているものの未解決であった。曲線の補集合の対数的小平次元が１以下の場合には正しいことが知られているので対数的小平次元が２の場合を研究の対象とした。対数的小平次元が２の曲線は、その具体例が少ないので新たな曲線の発見も研究目的とした。

(2) 種数が１以上の尖点平面曲線
種数が１以上の尖点平面曲線については新たな曲線の発見を研究目的の一つとした。また有理尖点平面曲線に対して成立する諸定理の、種数が１以上の尖点平面曲線に対する拡張を試みることも研究目的とした。その一つとして、有理尖点平面曲線に対してはその次数が曲線の最大重複度の３倍未満であることが知られている。そこで楕円尖点平面曲線に対しても同様の関係式が成り立つのかどうかを明らかにしたいと考えた。さらに種数が大きい尖点平面曲線についても同様の関係式が成り立つのかどうかを調べることを研究目的とした。

３．研究の方法
(1) 開曲面の研究成果の応用
これまでの研究において平面代数曲線論の諸結果よりもむしろ他分野の研究結果が有理尖点平面曲線の研究の進展に貢献してきた。とくに開曲面の研究結果を平面曲線の補集合に適用することが有効であった。有理尖点平面曲線の補集合はＱホモロジー平面と呼ばれる開曲面の一種であり、これ自体研究が盛んに行われている。とくに対数的小平次元が２のＱホモロジー平面が持つ性質は本研究を進める上で重要であると考えた。このような観点から平面代数曲線にこだわらず他分野の研究結果がこの研究に応用できるかどうかを広く検討した。

(2) 特異点を解消したときの曲線の固有変換の自己交点数
尖点平面曲線の特異点の極小埋め込み解消による曲線の固有変換の自己交点数に注目した。ここで極小埋め込み解消とは曲線の逆像が正規交差因子になる最短のブローアップの列の合成である。この自己交点数がある程度大きいときには曲線の特異点を解消して得られる曲面上によい性質を持ったファイブレーションを構成できる。このファイブレーションを詳しく解析することで曲線を調べる方法を検討した。

(3) 新たな曲線の構成
新たな曲線を構成する方法としては既知の曲線をクレモナ変換で移して新たな曲線を得る方法を検討した。また(2)のファイブレーションを使って新たな曲線を構成する方法も検討した。

４．研究成果
以下の説明では複素射影平面上の代数曲線で特異点として局所的に既約なものだけを持つものを尖点平面曲線と呼ぶ。また尖点平面曲線Cの特異点の極小埋め込み解消による曲線の固有変換をC'と書く。

(1) 種数が２の単尖点平面曲線について
尖点平面曲線で特異点を一つだけ持つものを単尖点平面曲線と呼ぶことにする。単尖点平面曲線の中で重要なものの一つとして特異点における接線と一点だけで交わる平面曲線が挙げられる。曲線の非特異モデルの種数が０の場合は、単尖点平面曲線Cがこの性質を持つこととC'の自己交点数が２以上であることが同値であることが知られている。一方曲線の非特異モデルの種数が１の場合は、単尖点平面曲線Cがこの性質を持つこととC'の自己交点数がちょうど６であることが同値であることが分かっている。そこでこの研究では曲線の非特異モデルの種数が２

の場合に同様の結果が得られないかどうかを調べた。
種数が２の単尖点平面曲線ＣについてC'の自己交点数は１０以下であることが分かっている。C'の自己交点数が１０であると仮定すると、特異点の解消で得られる曲面上に一般のファイバーが種数２の非特異曲線であるファイブレーションを構成することができる。種数２のファイブレーションについては特異ファイバーの分類結果がある。そのこととファイブレーションの構成の仕方から次のことを示した。対象の平面曲線は上記のとおり種数２の単尖点平面曲線Ｃで、さらに２重点を一つ持つ４次曲線ではないと仮定する。このとき、C'の自己交点数が１０であることとＣが特異点における接線と一点だけで交わることが同値であることを示した。

(2) C'の自己交点数が１０未満の種数が２の単尖点平面曲線Ｃについて
この研究では種数が２の単尖点平面曲線ＣでC'の自己交点数が１０未満のものを調べた。その結果、C'の自己交点数が９と８の曲線が存在しないことを証明した。さらにC'の自己交点数がちょうど７の曲線の具体例を構成した。研究の際には研究成果(1)と同様に曲線の特異点を解消して得られる曲面上に一般のファイバーが種数２の非特異曲線であるファイブレーションを構成して、そのファイブレーションが持つ性質と特異ファイバーの分類結果を利用した。

(3) 特異点を二つ持つ有理尖点平面曲線について
この研究では特異点を二つ持つ有理尖点平面曲線Ｃを研究の対象とした。このような曲線の補集合の対数的小平次元は１以上であることが知られている。さらにC'の自己交点数は０以下でありちょうど０であることと曲線の補集合の対数的小平次元が１であることは同値であることが分かっている。
この研究では C'の自己交点数が－１の曲線の分類を行い、この条件をみたす曲線をすべて決定した。分類結果にはこの分類によって得られた曲線の構成方法や特異点の数値的データなどが含まれる。分類の際には曲線の特異点を解消して得られる曲面上に一般のファイバーが射影直線であるファイブレーションを構成して、そのファイブレーションが持つ性質を利用した。

(4) 有理尖点平面曲線Ｃが特異点を３個以上持つときのC'の自己交点数の上界
この研究では有理尖点平面曲線ＣについてC'の自己交点数の上界を研究対象とした。Ｃの特異点の数をｎとする。ｎが１でＣの補集合の対数的小平次元が１以上のときC'の自己交点数は－２以下であることが知られている。また研究成果(3)の説明で述べたとおりｎが２のときC'の自己交点数は０以下であることが分かっている。この研究ではｎが３以上のときにC'の自己交点数が 7-3n 以下であることを証明した。ｎが３以上のときＣの補集合の対数的小平次元は２であることが知られている。証明にはこのことと有理尖点平面曲線の補集合がＱホモロジー平面であることを利用した。

(5) C'の自己交点数が－２で特異点を３個持つ有理尖点平面曲線Ｃについて
特異点を３個持つ４次の有理尖点平面曲線が射影同値を除いてただ一つ存在する。この４次曲線ＣについてC'の自己交点数は－２であり、研究成果(4)で得られた上界に等しい。この研究では特異点を３個持つ有理尖点平面曲線ＣでC'の自己交点数が－２であるものを決定した。
この条件をみたすＣの補集合上には一般のファイバーが射影直線から何点か除いたものであるファイブレーションを構成できる。次にこのファイブレーションの存在を仮定するとその構造から、いくつかの直線の特別な配置を射影平面上に構成できる。この直線の配置から始めて、この手順を逆にたどってＣを構成できるかどうかを調べて、構成できるＣは上記の４次曲線に限ることを証明した。

(6) 特異点を４個持つ有理尖点平面曲線について
この研究では特異点を４個持つ有理尖点平面曲線に注目した。有理尖点平面曲線で特異点を４個以上持つものの具体例は特異点を４個持つ１つの５次曲線しか知られていない。Ｃを有理尖点平面曲線で特異点を４個持つものとする。研究成果(4)によりC'の自己交点数は－５以下であることが分かっている。前述の５次曲線の場合はこの値は－７である。そこでこの研究ではC'の自己交点数が－５や－６の曲線Ｃが存在するのかどうかを調べた。
このような曲線Ｃが存在すると仮定するとＣの補集合上に一般のファイバーが射影直線から何点か除いたものであるファイブレーションを構成できる。次にこのファイブレーションの存在を仮定するとその構造から、いくつかの既約２次曲線と直線の特別な配置を射影平面上に構成できる。研究成果(5)と同様に平面曲線の配置から始めて、この手順を逆にたどってＣを構成できるかどうかを調べた。
この平面曲線の配置はC'の自己交点数やＣの特異点などによってさまざまな可能性があるが、C'の自己交点数が－５の場合にはどのような配置からはじめてもＣを構成できないことを示すことでこのようなＣが存在しないことを証明した。C'の自己交点数が－６の場合には、４個の中の３個の特異点の重複度列の１より大きい重複度の最小値が２である場合にはＣを構成できないことを示した。こうして特異点を４個持つ有理尖点平面曲線Ｃ

で C' の自己交点数が－６で３個の特異点が上記の条件をみたすものは存在しないことを証明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① 戸野 恵太、On the self-intersection number of the nonsingular models of rational cuspidal plane curves, arXiv:1408.0190v1 [math.AG], 査読無、2014、17 ページ、
http://arxiv.org/abs/1408.0190v1

② 戸野 恵太、On a new class of rational cuspidal plane curves with two cusps, arXiv:1205.1248v1 [math.AG], 査読無、2012、27 ページ、
http://arxiv.org/abs/1205.1248v1

〔学会発表〕（計１０件）
① 戸野 恵太、On the self-intersection number of the nonsingular models of cuspidal plane curves、第 13 回アフィン代数幾何学研究集会、2015 年 3 月 6 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪府大阪市）

② 戸野 恵太、有理尖点平面曲線の非特異モデルの自己交点数について、代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜、2015 年 1 月 10 日、ソフトピアジャパン（岐阜県大垣市）

③ 戸野 恵太、有理尖点平面曲線について 第 4 回 代数曲面ワークショップ at 南大沢、2013 年 8 月 3 日、首都大学東京（東京都八王子市）

④ 戸野 恵太、On rational cuspidal plane curves、代数幾何ミニ研究集会、2013 年 3 月 28 日、埼玉大学（埼玉県さいたま市）

⑤ 戸野 恵太、有理尖点平面曲線の特異点を解消したときの自己交点数について、第 10 回アフィン代数幾何学研究集会、2012 年 9 月 7 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪府大阪市）

⑥ 戸野 恵太、特異点を２つ持つ有理尖点平面曲線について、津山代数幾何シンポジウム 2012、2012 年 7 月 31 日、津山高専（岡山県津山市）

⑦ 戸野 恵太、On unicuspidal plane curves of small genus、射影多様体の幾何とその周辺 2011、2011 年 11 月 5 日、高知大学（高知県高知市）

⑧ 戸野 恵太、On cuspidal plane curves、第７回アフィン代数幾何学研究集会、2011 年 3 月 3 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪府大阪市）

⑨ 戸野 恵太、有理尖点平面曲線について、代数幾何目白セミナー、2010 年 12 月 29 日、学習院大学（東京都豊島区）

⑩ 戸野 恵太、On rational cuspidal plane curves、第 6 回アフィン代数幾何学研究集会、2010 年 9 月 4 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪府大阪市）

〔図書〕（計１件）
① I.Arzhantsev, M.Furushima, R.V.Gurjar, A.Ishida, T.Kishimoto, E.Kobayashi, H.Kojima, M.Koras, S.Kuroda, K.Masuda, M.Miyanishi, T.Ohta, V.L.Popov, P.Russell, F.Sakai, Y.Takeda, R.Tanimoto, K.Tono, H.Yoshihara, M.Zaidenberg, D.Zhang, World Scientific Publishing, AFFINE ALGEBRAIC GEOMETRY, 2013, 330(285-299)

〔その他〕
本研究の成果のリストを掲載したホームページ
http://www.saitama-u.ac.jp/ktono/research/

６．研究組織
(1)研究代表者
戸野 恵太（TONO, Keita）
埼玉大学・理工学研究科・非常勤講師
研究者番号：３０４２２２１５

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
酒井 文雄（SAKAI, Fumio）
埼玉大学・理工学研究科・名誉教授
研究者番号：４００３６５９６