

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540044

研究課題名（和文）三角圏を介した非可換代数幾何学と表現論の分類問題における相互発展

研究課題名（英文）Interactive developments of classification problems in noncommutative algebraic geometry and representation theory via triangulated categories

研究代表者

毛利 出 (MORI IZURU)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50436903

研究成果の概要（和文）：本研究課題の主な研究成果は、非可換代数幾何学において重要な研究対象である量子射影空間と、有限次元多元環の表現論における重要な研究対象である Fano 代数との間に、三角圏を介して密接な関係があることを示したことと、それによって非可換代数幾何学や多元環の表現論の結果を互いに応用することを通して、分類問題を中心に新しい結果を生み出したことである。

研究成果の概要（英文）：The major achievements of this research project are that we showed that there exist intimate relationships via triangulated categories between quantum projective spaces, which are important research objects in noncommutative algebraic geometry, and Fano algebras, which are important research objects in representation theory of finite dimensional algebras, and that we produced new results mainly in classification problems by applying results of noncommutative algebraic geometry and of representation theory of algebras to each other.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

### 1. 研究開始当初の背景

非可換代数幾何学は、1990年代に Artin らによって創設された比較的新しい数学の研究分野であるが、現在も欧米を中心に急速に発展している。大雑把に言って非可換代数幾何学とは非可換代数(多元環)を代数幾何学の手法を用いて研究する分野といえる。代数幾何学における重要な研究課題の一つは低次元代数多様体を分類することであるが、同様

に非可換代数幾何学における重要な研究課題の一つは低次元非可換代数多様体を分類することである。実際(可換)代数幾何学を用いた Artin-Tate-Van den Bergh による量子射影平面の分野(1990)と Artin-Stafford による非可換射影曲線の分類(1995)とが非可換代数幾何学の出発点となっている。それで次なる目標は高次元量子射影空間や、非可換射影曲面を分類することであるが、これらの分類問題は研究代表者を含めて現在世界で多く

の研究者が取り組んでいる。

## 2. 研究の目的

本研究課題の目的は高次元量子射影空間の分類問題を見据えて、その斉次座標環である AS 正則代数の分類・研究を行うことである。特に量子射影空間と、有限次元多元環の表現論における重要な研究対象である Fano 代数との間に三角圏を介して密接な関係があることを示し、それを利用して分類問題を中心にこれらの両研究分野の相互発展を推進することである。

## 3. 研究の方法

研究代表者は非可換代数幾何学の専門家であるが、本研究課題は非可換代数幾何学のみならず、多元環の表現論、(可換)代数幾何学、可換環論などの知識が必要であったので、本研究課題に必要な知識を持った専門家を訪問したり招聘したりしながら研究を推進していった。また国内外で持たれる研究集会にも積極的に参加し、研究発表を通して研究成果の公表に努めるとともに、各分野の専門家の評価を伺うことによりさらに研究を促進していった。

## 4. 研究成果

(1) 近年源泰幸が Fano 代数という大局次元有限の有限次代数を導入し、多元環の表現論で脚光を浴びていることに着目し、源泰幸と共同研究を行い量子射影空間の斉次座標環である AS 正則代数の概念を拡張することによって、AS 正則代数の分類問題と Fano 代数の分類問題との間に導来圏という三角圏を介して、密接な関わりがあることを証明した。具体的には AS 正則代数から Beilinson 代数と呼ばれる Fano 代数を構成することができ、またその Fano 代数から preprojective 代数という多元環の表現論で重要な役割を果たす代数を構成することができるが、その preprojective 代数は拡張された意味での AS 正則代数であり、元の AS 正則代数と同型にはなっていないが、次数付き森田同値になっていることを証明した。これにより AS 正則代数を次数付き森田同値を除いて分類することと、Beilinson 代数を同型を除いて分類することとが同値となることが分かった。また AS 正則代数を斉次座標環とする量子射影空間の導来圏とその Beilinson 代数の導来圏とが圏同値であることも証明したので、量子射影空間を導来同値を除いて分類することと、Beilinson 代数を導来同値を除いて分類することとが同値であることも分かった。これらのことから非可換代数幾何学における

分類問題と多元環の表現論における分類問題との間に密接な関係があることが分かった。これらの結果を記した源泰幸との共著論文「The structure of AS-Gorenstein algebras」は数学の雑誌として最も評価の高い雑誌の一つである *Advances in Mathematics* に掲載された。また隔年で開催される多元環の表現論における最大規模の国際学会 XIV International Conference on Representations of Algebras において全体講演に選ばれたり、代数幾何学の国際研究集会 GCOE Conference “Derived categories 2011 Tokyo” や、非可換代数幾何学の国際研究集会 Noncommutative Algebraic Geometry Shanghai Workshop において招待講演に選ばれたりするなど、これらの結果は非可換代数幾何学だけでなく、多元環の表現論や代数幾何学においても高く評価された。またこれまでに得られていた研究成果と上記の結果を合わせて 52 ページにわたる論文「Classification problems in noncommutative algebraic geometry and representation theory」をヨーロッパ数学会で出版することができた。これによって、非可換代数幾何学の研究成果を多元環の表現論に応用したり、逆に多元環の表現論の研究成果を非可換代数幾何学に応用したり、今まであまり関係のなかった両研究分野が相互発展していく道が大きく開かれた。

(2) 実際多元環の表現論の非可換代数幾何学への応用として、研究代表者は多元環の表現論で重要な McKay 対応の非可換化に成功した。McKay 対応とは大雑把に言ってアフィン平面の有限群による商空間の特異点解消がその群の McKay quiver と呼ばれる quiver の preprojective 代数と導来同値になるというものであるが、任意の次元の量子射影空間に有限巡回群が作用している場合でも同様の結果が成り立つことを証明した。この結果は第 6 回日中韓環論国際シンポジウムで全体講演に選ばれ、またアメリカ数学会主催の非可換代数幾何学の研究集会や、Banff International Research Station で開催された多元環の表現論の研究集会において研究発表し好評を得た。またこの結果は論文「McKay type correspondence for AS-regular algebras」として数学の雑誌として評価の高い *Journal of London Mathematical Society* に掲載される予定である。現在研究代表者は指導学生の上山健太とともに AS 正則代数の有限群による不変式環の次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏を多元環の表現論的手法を用いて解析することに取り組み成果を上げており、これらの一連の研究は今後も大きく発展していくことが期待できる。

(3) また非可換代数幾何学の多元環の表現論への応用として、研究代表者は Beilinson 代数の研究を行った。大局次元有限の有限次元代数の分類は多元環の表現論において大変重要な研究課題である。大局次元が1の有限次元代数は森田同値を除いて quiver によって分類されているが、大局次元が2以上の有限次元代数の分類は多元環の表現論における未解決問題として現在でも盛んに研究されている。(次数1の元で生成された)3次元ネーターAS正則代数は Artin-Tate-Van den Bergh によって(可換)代数幾何学を用いて分類されているので、理論的には大局次元が2の Beilinson 代数も代数幾何学を用いて分類できるはずであるが、Beilinson 代数を同型を除いて具体的に分類するためには、与えられた AS 正則代数がいつ次数付き森田同値であるかを(可換)代数幾何学を用いて判定できることが重要である。これに関して指導学生の上山健太との共同研究において成果を得、共著論文「Graded Morita Equivalences for Geometric AS-regular algebras」が Glasgow Mathematical Journal に掲載された。この非可換代数幾何学と多元環の表現論とを相互発展させるという新しい研究手法は、非可換代数幾何学を専門とする研究代表者だけではなく、最近になって多元環の表現論の専門家である Herschend-Iyama-Oppermann によって Fano 代数上の正則加群の分類問題として提起されたが、現在研究代表者は非可換代数幾何学において最も古くから研究されている3次元ネーターAS正則代数の種々の結果を用いることによって、大局次元2の Beilinson 代数の正則加群の分類に取り組み成果を上げている。これらの一連の研究は多元環の表現論の研究者にとっても大変重要で、今後多元環の表現論の研究者と協力していくことで、大きく発展していくことが期待できる。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Izuru Mori and Kenta Ueyama, Graded Morita equivalences for Geometric AS-regular algebras, Glasg. Math. J. 55 (2013), 241-257 査読有
- ② Izuru Mori, Some derived equivalences between noncommutative schemes and algebras, Derived Categories in Algebraic Geometry Tokyo 2011, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zurich (2012), 185-196 査読有

③ Izuru Mori, Classification problems in noncommutative algebraic geometry and representation theory, Representations of Algebras and Related Topics, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zurich (2011), 355-406 査読有

④ Izuru Mori and Hiroyuki Minamoto, The structure of AS-Gorenstein algebras, Adv. Math. 226 (2011), 4061-4095 査読有

⑤ Izuru Mori, 「論説」非可換代数幾何学「数学」第62巻第2号 日本数学会編集 岩波書店 (2010), 219-239 査読有

[学会発表] (計11件)

① Izuru Mori, Points of a quantum plane, 第8回代数・解析・幾何学セミナー 2013年2月19日 鹿児島大学 (招待講演)

② Izuru Mori, McKay type correspondence for AS-regular algebras, XV International conference on representations of algebras, 2012年8月14日 Bielefeld University, Bielefeld, Germany

③ Izuru Mori, Fixed subalgebras, skew group algebras and endomorphism algebras of AS-regular algebras, Linking representation theory, singularity theory and non-commutative algebraic geometry, 2012年5月10日 Banff International Research Station, Banff, Canada (招待講演)

④ Izuru Mori, McKay type correspondence for AS-regular algebras, Special session on noncommutative algebra and geometry, 2012年3月3日 AMS Sectional Meeting, University of Hawaii, Honolulu, U.S.A.

⑤ Izuru Mori, The structure of AS-regular algebras, Noncommutative algebraic geometry Shanghai workshop 2011, 2011年9月12日 Fudan University, Shanghai, China (招待講演)

⑥ Izuru Mori, Artin-Schelter Gorenstein algebras, RIMS 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」2011年9月7日 京都大学数理解析研究所 (招待講演)

⑦ Izuru Mori, McKay type correspondence for AS-regular algebras, 第6回日中韓環論国際シンポジウム 2011年6月29日 Kyung

Hee University, Suwon, Korea (全体講演)

⑧ Izuru Mori, McKay correspondence in noncommutative algebraic geometry, Workshop on Non-commutative geometry and the McKay correspondence, 2011年3月15日 名古屋大学 (招待講演)

⑨ Izuru Mori, Fano algebras and quantum projective spaces, GCOE Conference “Derived categories 2011 Tokyo”, 2011年1月26日 東京大学 (招待講演)

⑩ Izuru Mori, Quantum Beilinson algebras, Test problems for the theory of finite dimensional algebras, 2010年9月16日 Banff International Research Station, Banff, Canada (招待講演)

⑪ Izuru Mori, Classification problems in noncommutative algebraic geometry and representation theory, XIV International conference on representations of algebras, 2010年8月12日 国際オリンピック記念青少年センター, 東京 (全体講演)

[その他]

ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~simouri/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

毛利 出 (MORI IZURU)  
静岡大学・理学部・准教授  
研究者番号：50436903

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし