

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540045

研究課題名(和文) ルート系に付随する種々の多重ゼータ関数の総合的研究

研究課題名(英文) Studies on various multiple zeta-functions associated with root systems

研究代表者

小森 靖 (KOMORI, Yasushi)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：80343200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：量子ゲージ理論において最も基本的で重要な量である分配関数と、数論において非常に重要な役割を果たすゼータ関数が一致することがある。その一つの例として Witten ゼータ関数があげられる。この関数の正の整数点における特殊値は両分野において大切な量であり、様々な視点で調べる必要がある。この問題に関し、申請者は母関数を構成することによってそれらの値を統一的に扱う方法を発見した。また関連する別種のゼータ関数や超幾何関数についてもルート系という視点からの研究により関数関係式や新たな公式などを発見した。

研究成果の概要(英文)：Both partition functions in quantum gauge theories and zeta-functions in mathematics, which play fundamental and important roles in each area, happen to coincide in some cases. Among them are the Witten zeta-functions. Special values of these zeta-functions at positive integers are the main objects and should be studied from various viewpoints. For this problem, we established a unified way to treat these values via their generating functions. We also obtained new functional relations and formulas for related zeta-functions and hypergeometric functions from the viewpoint of root systems.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：多重ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

量子ゲージ理論において最も基本的で重要な量である分配関数を記述するために Witten によって導入された多重級数を Witten ゼータ関数と呼ぶ。この Witten ゼータ関数についてこれまで様々な研究がなされてきたが、本質的な解明には程遠い状況にあった。

申請者はこのような状況の中、Witten ゼータ関数の拡張として新たにルート系に付随する多変数多重ゼータ関数を導入し、Witten ゼータ関数の特殊値を与える母関数を構成することに成功した。これを契機に重要なクラスである Riemann ゼータ関数や Euler-Zagier 多重ゼータ関数、およびそれらの L 関数類似との関係が明らかになり、これまでの種々の結果を包含する結果をいくつも得ることができた。さらにルート系を軸として関連する別種のゼータ関数についてもいくつかの結果を導き出しており理論が急速に拡大、発展してきていた。

2. 研究の目的

本研究は、ルート系を中心に広がりを見せつつある様々な多重ゼータ関数を、表現論や数論、関数論、そして量子物理学等の分野を超えた枠組みで捉え、総合的に理解する理論の構築と解明を目標としている。具体的には以下の研究を行う。

- (1) ルート系に付随するゼータ関数の基礎理論の完成。
- (2) 量子ゲージ理論、及び量子多体系への応用。
- (3) 数論および Euler-Zagier 多重ゼータ関数論への応用。
- (4) 他の種類のルート系に付随するゼータ関数論への応用。

3. 研究の方法

上記の各々の研究の為に以下の方法を用いる。

- (1) ワイル群の Poincare 多項式、及びルート系の exponent が奇数での特殊値の計算において重要な役割を果たしていることが明らかになりつつあるため、この多項式により記述する方法を用いる。また一般の Hurwitz-Lerch 型の多重ゼータ関数について面積分表示を得ており、この表示は全空間で有効であるため、これを用いてルート系に付随するゼータ関数の有理型関数としての性質を明らかにする。
- (2) 球関数と関連しているゼータ関数は、物理方面でも盛んに研究されている Macdonald 多項式と関連していることから、多重ゼータ関数の研究は量子多

体系の研究と非常に密接に関連しているため、双方向からアプローチする方法をとる。

- (3) Euler-Zagier 多重ゼータ関数はルート系に付随するゼータ関数を特殊化することによって得られることから、この視点による解析を行う。
- (4) Lin Weng によって導入されたゼータ関数については一般のルート系において関数等式を示すことができています。また、これまでに A_1, A_2, B_2, G_2 型については Riemann 予想が関数等式を本質的に用いることによって示されている。したがって、一般の場合に得られた関数等式を用いることによって、すべての場合についての Riemann 予想を研究する。

4. 研究成果

- (1) ルート系に付随する多重ゼータ関数の特殊値を記述する母関数の簡単な表示を用いて Witten による一般の単連結とは限らない半単純コンパクトリー群を主束とする平坦接続のモジュライ空間の体積の計算について理論を構築し、具体的な場合として射影ユニタリ群 $PU(3)$ において計算を行った。また直交群 $SO(5), SO(7)$ および射影シンプレクティック群 $Psp(2), Psp(3)$ については具体的なゼータ関数の形を合同式を用いて表した。これらの結果により、空間が向き付け可能な場合については理論的にはすべて体積が具体的に計算できることになる。さらに向き付け可能でない場合を記述するための関数関係式をいくつか構成した。
- (2) 偶数次元 p 進ユニタリエルミート行列空間において球関数を導入し、そのフーリエ変換について研究を行った。球関数の明示式を Macdonald 多項式の特殊化を用いて書き下すことができた。
- (3) Euler-Zagier 多重ゼータ関数の特殊値、および値の関係式を、ルート系に付随する多重ゼータの特殊化を施すことによって得ることができた。これまでは特殊値の母関数はあったが、新たに得られたものは特殊値だけではなく、同時に関係式も与えるものであり、さらに制限和公式を精密化した公式を与えるものである。またこれまで Shuffle 積は Drinfel'd 積分でしか定義できていなかったが、部分分数展開を用いて定義できることを示し、さらにこの定義は代数的定式化による代数計算と完全に一致していることを示した。
- (4) 一般ルート系に付随する Weng ゼータの関数等式を用いることによって、ある仮定の元、このクラス全体に対する弱い形のリーマン予想の証明を行った。ただ

しまだ完全な形で解決には至っていない。

(5) (他の結果)

BC 型多重楕円超幾何級数の変換公式について研究を行い、一重楕円超幾何級数から行列式を構成して多重化し組み上げるという方法 (Principal specialization) を用いて、これまでにある多重楕円超幾何級数の変換公式を含む新たな公式を発見した。

2重 L 関数の関数等式を発見し、それを用いることによって非正整数での特殊値を与えた。またその p 進類似を導入し、同様の結果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III, in Multiple Dirichlet Series, L -functions and Automorphic Forms, Progress in Mathematics, 2012, Vol. 300, 223-286. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Evaluation formulas of Cauchy-Mellin type for certain series involving hyperbolic functions, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 60 (2011), 127-142. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L -functions and values at non-positive integers, Int. J. Number Theory, 7 (2011), 1441-1461. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, A survey on the theory of multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu B28 (2011), 99-120. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, Math. Z., 268 (2011), 993-1011. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Multiple zeta values and zeta-functions of root systems, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 87 (2011), no. 6, 103-107. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions

associated with semisimple Lie algebras IV, Glasg. Math. J., 53 (2011), 185-206. 査読有。

Y. Komori, An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers, Quart. J. Math., 61 (2010), 437-496. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations and functional relations for the Euler double zeta-function and its generalization of Eisenstein type, Publ. Math. Debrecen, 77 (2010), 15-31. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II, J. Math. Soc. Japan, 62 (2010) No. 2, 355-394. 査読有。

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems, Proc. London Math. Soc., 100 (2010), 303-347. 査読有。

[学会発表](計 11 件)

小森 靖, ルート系に付随する多重ゼータ関数について, (立教大学数理物理学研究センター第 13 回セミナー, 2012 年 12 月 5 日, 立教大学)。

Y. Komori, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, (2012 Conference on L -functions, 2012 年 8 月 24 日, Jeju, Korea)。

小森 靖, ルート系と多重ゼータ関数について, (第 5 回多重ゼータおよびその周辺, 2012 年 1 月 27 日, 九州大学)。

小森 靖, Witten ゼータ関数入門 (II) (関西多重ゼータ研究会, 2012 年 1 月 21 日, 大阪工業大学)。

小森 靖, ルート系のゼータ関数とベルヌーイ関数 (I), (明学セミナー, 2011 年 12 月 10 日, 明治学院大学)。

Y. Komori, Euler Zagier zeta-functions and zeta-functions of root systems, (Oberseminar zahlentheorie, 2011 年 9 月 14 日, Wuerzburg, Germany)。

Y. Komori, Zeta-functions of root systems and of Lie groups, (Analytic and probabilistic methods in number theory, 2011 年 9 月 7 日, Palanga, Lithuania)。

小森 靖, リー群に付随するゼータ関数について, (第 4 回ゼータ若手研究集会, 2011 年 2 月 21 日, 沖縄県青年会館)。

小森 靖, 連結半単純コンパクトリー群に付随するゼータ関数について, (2010 年度表現論シンポジウム, 2010 年 11 月

10日, 公共の宿おとり荘).

小森 靖, ルート系のゼータ関数と多重ゼータ値 I, (多重ゼータ値の諸相, 2010年9月8日, 京都大学).

Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems, (Developments in Quantum Integrable Systems, 2010年6月14日, 京都大学).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小森 靖 (KOMORI, Yasushi)
立教大学・理学部・准教授
研究者番号: 80343200

(2) 連携研究者

松本 耕二 (MATSUMOTO, Kohji)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号: 60192754

津村 博文 (TSUMURA, Hirofumi)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 20310419