様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月　２２日現在

機関番号：32665
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540047
研究課題名（和文）
イデアルのべきに付随する環論的不変量の研究
研究課題名（英文）
Research of ring-invariants associated to powers of ideals

研究代表者
吉田　健一（Yoshida Ken-ichi）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802

研究成果の概要（和文）：二項式で定義された超曲面の対角的Ｆ閾値の計算方法を与えた。標準的次数付きアフィントーリック環のＦ（純）閾値と後藤・渡辺による不変量との間の不等式を証明した。グラフの辺イデアルのべき及び形式的べきのコーエン・マコーレー性を議論し、３次以上のべきがコーエン・マコーレーになるようなグラフを特徴づけた。また、２次のべきについても同様の成果を得た。正標数の理論（スコダの定理）を応用して、後藤数に関するワン型の定理を証明した。

研究成果の概要（英文）：We give a calculation method of the diagonal F-thresholds on binomial hypersurfaces. Moreover, we prove an inequality on the diagonal F-thresholds, the a-invariant (due to Goto and Watanabe) and the F-pure thresholds on standard graded affine toric rings. We discuss Cohen-Macaulay properties of powers of edge ideals of simple graphs, and characterize graphs higher powers of edge ideals for which are Cohen-Macaulay. Furthermore, we give a similar result in the case of second power. As an application of Skoda's theorem, we prove a variant of Wang's theorem (about Goto number).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：環論

１．研究開始当初の背景
(1)フロベニウスべきと密着閉包，ヒルベルト・クンツ重複度：本研究における対象は、標数が素数の可換ネーター環のイデアルである。この研究は１９８０年代後半にホクスターとヒューネケにより導入された密着閉包の研究と密接に関わっている。密着閉包は、線形簡約な代数群による不変部分環のコーエン・マコーレー性、ブリアンソン・スコダの定理の他、いくつかのホモロジカル予想に対して、画期的に短い証明を与える道具であることが示され、その性質や応用がこれまでに多くの研究者により調べられてきた。特に、日本大学の渡辺敬一氏が密着閉包を用いて

定義したＦ有理性は、スミス、原、メータ・シリニバスらにより、代数幾何における有理特異点（標数０）を正標数に還元した概念であることが証明され、標数０の特異点を正標数の可換環論を用いて理解する際のひな形とされている。研究代表者は、先行する研究において、東北大学の原伸生氏と共に密着閉包の概念を一般化し、「代数幾何における乗数イデアル」に対応する概念として正標数の可換環における概念（テストイデアル）を導入することに成功した。応用として、ログ標準閾値の計算が正標数の可換環におけるイデアルのべきとフロベニウスべきの比較問題に帰着される。

⑵イデアルのべきと形式的べきの環論的性質：本研究の対象は標数には無関係な可換ネーター環のイデアルである。イデアルの性質の研究は可換環論としては古典的である。さらに、形式的べきをフィルトレーションとして定まる次数付き環のネーター性の問題は永田雅宜氏が否定的に解決したヒルベルトの第１４問題と密接な関係にあり、現在もリース環の研究として拡張され、国内外問わず研究が盛んである。また、連携研究者の寺井直樹氏に加えて、大阪大学（現：静岡大学）の木村杏子氏との共同研究では単項式イデアルの算術的階数を決定する問題に取り組んできた。この研究において、アナリティックスプレッドと呼ばれる不変量が補助的な役割を演ずるが、その計算においてイデアルのべきの深さの計算は重要である。深さは十分高いべきについては漸近的に振る舞うが、低いべきについての挙動は不明である。

２．研究の目的

⑴正則環のイデアルの密着閉包は自分自身である。この性質を持つ環をＦ正則環と呼ぶ。Ｆ正則環が局所化と可換であるか、という問題は密着閉包の局所化問題の一部と捉えることができるが、これも一般には未解決である。この事実はＦ正則性をイデアル論的に展開する際の障害となっている。カッツマン、アーベルバッハなどの研究により、フロベニウスべき（の密着閉包）の素因子を制御することが重要であることが知られている。本研究の目的の一つは、フロベニウスべきの素因子を決定するアルゴリズムの確立である。

密着閉包の概念は非常に有効であるが、その性質の理解は困難であることが分かってきた。例えば、数年前に密着閉包と局所化は必ずしも可換でないことがブレンナー・モンスキーにより証明され、関係者を驚かせた。その証明におけるポイントは、密着閉包のベクトル束を用いた記述の他、フロベニウスべきに付随する不変量（ヒルベルト・クンツ重複度）の奇妙な性質にある。そこで、ヒルベルトクンツ重複度のさまざまな性質（有理性、最小値、分布状態）を調査することを目的にあげる。以上の研究が進んだ場合には、Ｆ正則性の局所化との可換性の証明に挑戦したいと考えている。

⑵ブックスバウム性はコーエン・マコーレー性を一般化した概念であるが、リース環などのブローアップで定まる一連の環の研究には欠かせない概念である。その研究は昨今は下火になっていたが、連携研究者の寺井直樹氏と研究代表者は無平方な単項式イデアルで定まる環、すなわち、スタンレー・リースナー環を中心に新たな視点から研究を始めた。実際、このクラスではブックスバウム性はもとの単体的複体が「多様体」になる条件に極めて近いが微妙な相違点があり、この分野の専門家の研究を阻んでいる。そこで、次の２つの視点からより詳細の研究を遂行することを目的としたい。一つ目は、高次の形式的べきのコーエン・マコーレー性（ブックスバウム性）の決定である。２つ目は単項式イデアルのべきのアナリティックスプレッドや深さの計算方法の確立である。いずれも理論だけでなく、計算ソフト（マコーレーなど）の普及により、初心者の参入も可能な状況になっており、大学院生などの協力も得て、大きなプロジェクトにしたいと考えている。

３．研究の方法

(1)密着閉包の局所化問題：密着閉包の局所化問題は、ブレンナー・モンスキーにより否定的に解決されているが、専門家の間でもその証明の本質があまり理解されている状況ではない。そこで、最初の目標としては研究代表者が平成２０年に明治大学で行った集中講義の内容を精査して、彼らの証明の見直しを行う。特に彼らの例は標数が２という特殊な例であり、一般の標数に対する反例の構成も同時に行う。続いて、強Ｆ正則環における一般化された密着閉包の局所化問題について取り扱う。これはカッツマン、アーベルバッハ・ホクスター・ヒューネケの証明の見直しから取り組む予定である。さらに、関連する研究として、原伸生氏と研究代表者が定義した一般化されたテストイデアルの定義の見直し、局所化などについても検討する。初年度の成果が十分に得られれば、Ｆ正則性の局所化問題に取り組む。研究が予定通り進まなかった場合の対策として、Ｑ－ゴレンシュタイン性の特徴付け問題に取り組む。このクラスについては、局所化問題が肯定的に解決されており、このクラスの十分な理解は障害を取り除くことに意味があると考えている。

(2)ヒルベルト・クンツ重複度の計算：フロベニウスべき及びそれに関連した捕捉イデアルの計算方法を模索する予定である。これらのイデアルの計算方法は、既存の計算ソフ

トではうまく行かないことが知られている。後期博士課程の松田一徳君の協力を経て、計算の理論的側面の研究を行う。さらに、応用として、Ｆ純閾値の計算方法の確立を目指す。
(3)スタンレー・リースナーイデアルのべきの計算方法の確立：初年度はグラフに付随する単項式イデアル（辺イデアル）に限定して、計算方法の確立を目指す。それに先立ち、研究代表者と寺井直樹氏、クルピ氏、リナルド氏らと辺イデアルに対するカウシク・ノリの定理を拡張した。これはイデアルの高さより大きなべきに対する剰余環のコーエン・マコーレー性を用いてイデアルの構造を制限する定理である。本研究ではこの結果をより強い形で証明し、さらにブックスバウム性についても同様の結果を得る予定である。また、通常のべきの他、形式的べきに関する考察も予定している。この研究には、ホクスター・高山の公式の理解が必要である。現時点ではこの公式は本研究の遂行では十分ではないので、それの改良に努める。

４．研究成果

(1)二項式で定義された超平面の対角的Ｆ閾値の計算：研究代表者は、大渓正浩氏、松田一徳氏と協力して、二項式で定義された超平面の対角的Ｆ閾値の計算方法を与えた。また、そのような超平面がＦ純やＦ正則になるための必要十分条件を与え、Ｆ純閾値も計算し、先の結果と比較した。この研究成果は、対角的Ｆ閾値の自明でない具体例としては初見に近い。また、計算方法は同じ超平面に関してコンカが与えたヒルベルト・クンツ重複度の計算方法を発展させたものであり、ヒルベルト・クンツ重複度の成果を参考にできる点が、非常に興味深い。Ｆ閾値は、正則局所環の場合にはＦ純閾値と一致し、それをより一般の環に対して定義できるように広げられた概念であるが、一般には両者が等しくなるのは稀のようである。本研究の成果は両者が等しくなるような具体例も与えており、意義深い。本研究をベースにセグレ積を含む日比環やトーリック環に対する研究が進行中である。
(2)無平方な単項式イデアルの２番目のべきの研究：本研究は、研究代表者が寺井直樹氏、リナルド氏の協力の下で、先行するエッジイデアルのべきの研究を無平方な単項式イデアルのべきの研究に発展させたものである。３以上のべきの研究は研究代表者のグループ及びベトナムのグループにより特徴づけがなされていることに注意すると、２番目のべきが主たる研究対象である。本研究では、２番目のべきのコーエン・マコーレー性を中心に、特徴づけを与えた。また、完全交叉にリンクするクラスを用いて、具体例を多く構成した。
(3)単項式イデアルのべきのコーエン・マコーレー性：研究代表者はリナルド氏、寺井直樹氏の協力の下で、グラフの辺イデアルのべきのコーエン・マコーレー性を研究した。主結果として、辺イデアルのすべての形式的べきがコーエン・マコーレーであるための必要十分条件は、グラフが完全グラフの互いに素な和集合になることであることを証明した。上記の条件は、ある３以上の整数ｎに対して、形式的ｎべきがコーエン・マコーレーであることと同値であることも示された。系として、３以上のべきがコーエン・マコーレーならば、イデアルは完全交叉であることが示される。この結果は、カウスク・ノリ定理の精密化である。一方、本結果は、その後より一般の無平方な単項式イデアルの形式的べきのコーエン・マコーレー性の判定法のたたき台になった。
(4)単項式イデアルの２乗のコーエン・マコーレー性：(3)の結果において、ｎ＝２の場合はバスコンセロスの予想と関連があり、未解決であった。研究代表者は(3)と同じ研究者と協力して、辺イデアルの場合にグラフの分類を用いてバスコンセロスの予想を本質的に解決した。さらに、イデアルの形式的べきと通常べきがいつ等しくなるかと言う問題に対しても貢献した。関連して、イデアルのリッチ性を研究して、スタック凸多面体の境界複体の単項式イデアルの２乗がコーエン・マコーレーであることを証明した。この研究は今後の研究の１つの指針となった。
(5)トーリック斉次代数の対角的Ｆ閾値の計算及びＦ純閾値の評価：トーリック環のＦ閾値、Ｆ純閾値については廣瀬氏により計算方法が与えられている。また、高木俊輔氏、渡辺敬一氏はゴレンシュタイン斉次代数のＦ純閾値は a-不変量（後藤・渡辺不変量）に等しいことを既に示していた。本研究の研究成果として、トーリック環の場合に、Ｆ純閾値、a-不変量、対角的Ｆ閾値についての大小関係が常に成立することを証明し、等号成立とゴレンシュタイン性の関係を示した。
(6)正標数の手法を用いたワンの定理の一般化：正標数の理論のうち、テストイデアルの理論とスコダの定理を応用して、後藤数に関するワンの定理の一般化を証明することに成功した。類似の結果はいくつか知られているが、正標数の手法を用いたものは見られない点と、環によらない均質な上限を与えた点が著しい成果である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）
① Takahiro Chiba, Kazunori Matsuda,

Ken-ichi Yoshida、On the ratio of the multiplicity and the embedding dimension of Hibi rings、Proc. Inst. Nat. Sci. (Nihon Univ.)、査読有、48巻、2013年、185-195.
②Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi Yoshida、A variant of Wang's theorem、Journal of Algebra、査読有、369巻、2012年、129-145.
③ G. Rinaldo, Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida、Cohen-Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals、Journal of Algebra、査読有、347巻、2011年、1-22.
④ G. Rinaldo, Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida、On the second powers of Stanley-Reisner ideals、Journal of Commutative Algebra、査読有、3巻、2011年、405-430.
⑤Kyouko Kimura, Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida、Schmitt-Vogel type lemma for reductions、Archiv der Mathematik、査読有、96巻、2011年、535-545.
⑥ Masahiro Ohtani, Kazunori Matsuda, Ken-ichi Yoshida、Diagonal F-threshols on binomial hypersurfaces、Communications in Algebra、査読有、38巻、2010年、2992-3013.
⑦M. Crupi, G. Rinaldo, Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida、Effective Cowsik-Nori theorem for edge ideals、Communications in Algebra、査読有、38巻、2010年、3347-3357.

〔学会発表〕（計7件）
① 吉田 健一(大関 一穂, 後藤 四郎, 高橋 亮, 渡辺 敬一)、2次元有理特異点上のUlrichイデアル, 加群、日本数学会年会代数学分科会、2013年03月20日、京都大学情報学研究科(京都府).
② 吉田 健一、2次元巡回商特異点上のUlrich, Special 加群、第25回可換環論セミナー、2013年02月01日、奈良県新公会堂(奈良県).
③ 吉田 健一(大関 一穂, 後藤 四郎, 高橋 亮, 渡辺 敬一)、Ulrich ideals and modules of 2-dimensional rational singularities, I, II、The 34th Symposium on Commutative Algebra in Japan、2012年11月24日、IPC生産性国際交流センター(神奈川県).
④ 吉田 健一(渡辺 敬一)、Ulrich modules and Special modules over 2-dimensional rational singularities、第45回環論及び表現論シンポジウム、2012年09月08日、信州大学理学部(長野県).
⑤ 吉田 健一、Special Cohen-Macaulay modules and ideals、明治大学可換環論セミナー、2012年07月14日、明治大学理工学部(神奈川県).
⑥ 吉田 健一（渡辺 敬一)、斉次トーリック環におけるF-thresholdとa-invariantの比較、日本数学会代数学分科会、2011年9月28日、信州大学(長野県).
⑦ 吉田 健一（渡辺 敬一）、A positive characteristic approach to Wang's theorem、the 32nd Symposium and The 6th Japan Vietnam Joint Seminar、2010年12月16日、IPC生産性国際交流センター(神奈川県).

〔その他〕
ホームページ等
http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/scripts/websearch/gakubu_result.htm

６．研究組織
(1)研究代表者
吉田 健一（Yoshida Ken-ichi）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802

(2)研究分担者
橋本 光靖（Hashimoto Mitsuyasu）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：10208465
(H22-H23)

伊山 修（Iyama Osamu）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70347532
(H22-H23)

(3)連携研究者
寺井直樹 （Terai Naoki）
佐賀大学・文化教育学部・教授
研究者番号：90259862
(H22-H23)