

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年3月31日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540050

研究課題名（和文） 有理曲線族とファノ多様体の多角的研究

研究課題名（英文） On families of rational curves and Fano varieties.

研究代表者

佐藤 栄一（SATO EIICHI）

九州大学・大学院数理学研究院・学術研究者

研究者番号：10112278

研究成果の概要（和文）：

ファノ多様体での全射正則写像 $f: X \rightarrow Y$ が、いつ局所自明、又は同型になるかをそれぞれ考察した。これはファノ多様体世界の考察・分類に有効だと思える。

前者は、一般ファイバーがファノ多様体で反相対標準直線束 $-K_f$ ($:= -K_X - f^*K_Y$) が半豊富のとき f は同型になる。同時に f が smooth 射では、デルペソ曲面 又は射影空間の超曲面でも同様の結果を得た。

後者では、全射正則写像 $f: X \rightarrow Y$ で X が射影空間内の3次元以上、次数3の非特異超曲面では Y が射影空間、2次超曲面以外で f は同型を与えることを示した。

研究成果の概要（英文）：

The reporter studied under what conditions a surjective morphism $f: X \rightarrow Y$ is locally trivial or isomorphic.

It is important and effective to classify the world of Fano varieties.

In the former case assuming that the anti-relative canonical line bundle $-K_f$ ($:= -K_X - f^*K_Y$) of the morphism f is nef, we can show f is locally trivial.

Especially in case of the smoothness of f assuming that a general fiber is Del pezzo surface or a smooth hypersurface, we get the same results.

In the latter case if X is an $n (> 2)$ -dimensional cubic hypersurface, f is an isomorphism unless Y is a projective space or a hyperquadric.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,300,000 円	390,000 円	1,690,000 円
2011年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
2012年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
年度			
年度			
総計	3,300,000 円	990,000 円	4,290,000 円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目:数学・代数学

キーワード:有理曲線、単有理性、ファノ多様体、コニック束、レフシェツの超平面切断研究分野

1. 研究開始当初の背景

報告者は小平次元マイナス ∞ の高次元多様体の構造の決定や「アンブル(ネフ)因子の性質の元の多様体への遺伝(レフシェツ定理)」の研究をし、知見を得た。特に森氏のハーツホーン予想解決に引き続き、接束の2次外積がアンブルベクトル束になる多様体の問題で、二次超曲面の構造を解析した。

これは、「双正則」の視点の問題で、考察対象の部分多様体、特に最小次数の有理曲線族を扱う重要性を認識した。有理等質空間をネフ接束でとらえる解決すべき重要問題がある。

一方、小平次元マイナス ∞ の世界では、{有理連結多様体} \supset {単有理多様体} \supset {有理多様体} の部分族がある。

半世紀以上のその様相・含有関係が不明確で、近年の高次元ファノ多様体の構造決定等の双正則的問題の解明に較べ、「有理・単有理を判定理論」も含め未解決のまま、70年代「有理 \neq 単有理」が示され以後進展なしだ。

更に3次元以上で「予想:有理連結は単有理?」及び双有理・双正則的問題「単有理はsmoothな変形不変?」は未解決だ。

これ等が以下の目的につながる。

2. 研究の目的

研究代表者は小平次元マイナス ∞ の世界を「明解な双有理的分類の概念地図を作成」することを目的とする。本研究では、小平次元マイナス ∞ の部分族の{有理連結多様体}(=任意の2点が有理曲線で張られる)を中心に、その上の有理曲線族を中心に解析すること、特に、「双正則・双有理の両視点」で有様を理解し、「計算機を利用し多様体を定義多項式で明示すること」更に、その多様体の地図から新視点、新しい切り口発見を目指す。

特に、「双有理の視点」から3つの族{有理連結多様体} \supset {単有理多様体} \supset {有理多様体}の相違をどうとらえ、その相違を理論化するかを全体の目的にする。

以下に具体的目的を述べる。

- ① ファノ多様体上の(最小次数の)有理曲線族のパラメータ空間考察、及びその空間内で特異曲線になる部分族の次元考察(双正則問題)
- ② [Lefschetz 問題] X を射影多様体、 A をアンブル因子とする。 A がファノ及び単有理のとき X にその性質は遺伝するか。また、 A が因子収縮写像、コニック束の時はどうか?
- ③(双有理的視点)「予想:(3次元)ファノ多様体 X は単有理か?
- ④ 双有理同型群(=Bir X)自己準同型半群(=End X)の考察(単有理と有理の区別の指標?)

3. 研究の方法

九州大学数理学研究院での定期セミナー:伊都代数幾何セミナーを頻繁に開催した。多くの研究者を当科研費を用いて講演を依頼した。

そこでの情報交換で上記も含め、新規の研究問題を取り入れ当該科研研究内容を精査した。同時に他大学に出張講演し「未解決問題の紹介」し当該科研問題の重要性を宣伝し、問題を共有しつつ研究を継続した。

国内・国外の研究集会に参加した。これには招待講演も含まれる。

特に、現時点では、予想:ファイバーがファノのsmooth族でパラメーターもsmooth射影多様体では局所自明であるか?があり、若手と現在進行形で議論しており、進展が期待できる。

上記記載定理はその特別な場合である。

4. 研究成果

目的の問題1, 4では成果があった。2, 3は直接的にはないが、考察する道具・知見は深化したように思える。

研究①の「ファノ多様体上の最小(小さい)次数の有理曲線族のパラメータ空間考察」に関してファノ多様体をファイバーとする射影多様体に関して以下の定理を得た。

定理1. 全射正則写像 $f: X \rightarrow Y$ でその一般ファイバーをファノ多様体とする。

その反相対標準直線束 $-K_f(= -K_X - f^*K_Y)$ を半豊富と仮定する。

その時、 Y のエタール被覆 Y' による底変換 $Y' \times_Y X \rightarrow X$ は Y' と F の直積 (F は f のファイバー)になる。

の完全な証明を与えた。

その際の主要点は2点ある。以下も新しい結果である。

- $-K_f$ は決して巨大にはならない。
- $-K_f$ が誘導する飯高ファイブレーションの一般ファイバーを F とすると法束 $N_{F/X}$ は自明束。

更にその研究過程で以下も得た。

定理: 非特異射影多様体が smooth 射を持ち、任意のファイバー以下の各場合にファイバー束になる。

- デルベソ曲面
- 射影空間の超曲面

この結果より高次元ファノ多様体でファイバー型の射を持つ場合、ある場合には自明束になることが分かり、高次元多様体の分類に有効な定理の一つを得る。

この研究を「Resolution of Singularities and Related Topics シンポジウム(広中教授80才記念研究集会)」で話した。

講演タイトル: On local triviality of Fano fibrations

スペイン, 2011 年。

② 上記研究1及び研究4. 双有理同型群や自己準同型半群の考察を広い立場で考察した。つまり「ファノ多様体間に全射正則写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するか」を最小次数の有理曲線族のパラメータ空間考察を中心に研究した。結果、 X がファノ超曲面のある場合には f は同型を与える部分的な結果を得た。そのうちのひとつとして定理 $f: X \rightarrow Y$ をファノ多様体間の全射正則写像とする。

X が3次元以上で次数3以下の非特異超曲面とする。

その時 Y が射影空間、2次超曲面以外のとき f は同型を与える。

この研究を「アフィン代数幾何学研究集会」で話した。

講演タイトル: Morphisms between Fano varieties
関西学院大学, 2013 年。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 15 件)

- ① Biswas, G. Schumacher and L. WENG, Deligne pairing and determinant bundle, Electronic Research Announcements in Math Sci, 査読有, 18, 2011, 91-96, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ② L. WENG, Stability and Arithmetic: An exact of essence, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B19, 2011, 187-220, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>
- ③ Shigeharu Takayama, On volumes along subvarieties of line bundles with nonnegative Kodaira-Iitaka dimension., Michigan Math. J., 査読有, 60no.1, 2011, 35-49, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ④ Takagi Shunsuke, A subadditivity formula for multiplier ideals associated to log pairs., Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 141 no. 1, 2013, 93-102, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ⑤ Huneke Craig, Takagi Shunsuke, Watanabe Kei-ichi, Multiplicity bounds in graded rings., Kyoto J. Math., 査読有, 51 no. 1, 2011, 127-147, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ⑥ Yoshiaki Fukuma, Topics on invariants of polarized varieties, Sugaku Expositions, 査読有, 25, 2012, 19-45, <http://www.ams.org/mathscinet/>

- ⑦ Yoshiaki Fukuma, A numerical characterization of polarized manifolds (X, L) with $K_X = -(n-i)L$ by the i th sectional geometric genus and the i th Δ -genus, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 48, 2012, 83-106, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ⑧ Yoshiaki Fukuma, Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized 3-folds, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 215, 2011, 168-184, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ⑨ Yoshiaki Fukuma, A lower bound for the second sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds and its applications, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 査読有, 69 no.1, 2011, 73-90, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- ⑩ Yoshiaki Fukuma, Invariants of ample vector bundles on smooth projective varieties, Riv. Mat. Univ. Parma, 査読有, Vol.2, 2011, 273-297, <http://www.ams.org/mathscinet/>
- [学会発表] (計 18 件)
- ① 佐藤栄一, Morphisms between Fano varieties, 第11回アフィン代数幾何学研究集会, 平成25年3月3日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス1004教室
- ② 佐藤栄一, Smooth projective varieties dominated by Del Pezzo varieties, 南九州代数系集会, 平成24年8月30日, 熊本大学黒髪南キャンパス理学部1号館1階C122室
- ③ 佐藤栄一, On Fano (weak Fano) fibrations and its applications, 都の西北代数幾何学セミナー, 平成24年6月1日, 早稲田大学・西早稲田キャンパス51号館18階08室
- ④ 佐藤栄一, On isotriviality of Fano fibration, Automorphisms of algebraic varieties - Dynamics and Arithmetic, 平成23年12月21日, リゾートホテルラフォーレ南紀白浜
- ⑤ 佐藤栄一, On Fano fibrations over curves, 射影多様体の幾何とその周辺 2011, 平成23年11月5日, 高知大学理学部2号館数学大セミナー室
- ⑥ Eiichi Sato, On local triviality of Fano fibrations, Resolution of Singularities and Related Topics, 2011.9.19, Casas del Tratado, Spain
- ⑦ 佐藤栄一, On relative anti-canonical line bundle of fiber spaces, 代数幾何学セミナー, 平成23年4月18日, 九州大学伊都キャンパス伊都図書館3階中セミナー室3
- ⑧ 佐藤栄一, Fiber varieties with nef anti-relative canonical line bundles, 代数幾何学ミニセミナー, 平成23年3月7日, 佐賀大学理工学部6号棟4階第2セミナー室
- ⑨ 翁林, A local family index theorem in log geometry, Tokyo-Seoul conference in mathematics, 2011.12.3, 東京大学
- ⑩ 翁林, Relative Bott-Chern secondary characteristic classes and arithmetic Riemann-Roch theorem, Number Theory and related topics,

2011.6.7, 中国科学技術大学・中国

- ⑪ 翁林, A construction of L functions, Workshop on L functions, 2011.4.23, 九州大学
- ⑫ 翁林, Parabolic reduction, stability and volumes of fundamental domains, Automorphic forms and automorphic function, 2011.1.19, 京都大学
- ⑬ 高山 茂晴, Effective estimate on the number of deformation types of families of canonically polarized manifolds over curves, 東大複素解析幾何セミナー, 2012年4月9日, 東京大学数理学部研究科棟126号室
- ⑭ 高木俊輔, A characterization of log Fano varieties, Arithmetic and Algebraic Geometry 2012, 平成24年2月15日, 東京大学大学院数理学研究科
- ⑮ 高木俊輔, 特異点論における正標数の手法, 東大数理学部講演会, 平成23年12月16日, 東京大学大学院数理学部研究科
- ⑯ Shunsuke Takagi, F-purity of isolated log canonical singularities, Algebraic Geometry in East Asia, Taipei, 平成23年11月18日, National Taiwan University, Taiwan
- ⑰ 高木俊輔, F-purity of isolated log canonical singularities, 第33回可換環論シンポジウム, 平成23年11月10日, 浜名湖カリアック
- ⑱ 福間慶明, 偏極多様体の多重随伴束の大域切断のなす次元について, 高知大学代数幾何セミナー-2011冬, 平成23年2月18日, 高知大学朝倉キャンパス理学部2号館

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 栄一 (SATO EIICHI)
九州大学・大学院数理学部研究科・学術研究者
研究者番号: 10112278

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

翁 林 (WENG LIN)
九州大学・大学院数理学部研究科・教授
研究者番号: 60304002

高山 茂晴 (TAKAYAMA SHIGEHARU)
東京大学・大学院数理学部研究科・教授
研究者番号: 20284333

高木 俊輔 (TAKAGI SHUNSUKE)
東京大学・大学院数理学部研究科・准教授
研究者番号: 40380670

福間 慶明 (FUKUMA YOSHIAKI)
高知大学・理学部・准教授
研究者番号: 20301319