様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２５年５月７日現在

機関番号：17401
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540051
研究課題名（和文）　複素アフィン平面および空間のコンパクト化の研究

研究課題名（英文）A study on compactifications of complex affine planes and spaces

研究代表者
古島　幹雄　（ FURUSHIMA MIKIO ）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00165482

研究成果の概要（和文）：

（１）研究１について：複素アフィン空間の第２ベッチ数１をもつ端末特異点をもつ Fano 多様体へのコンパクト化について，既に得られているコンパクト化についてゴレンスタイン端末特異点をもつ Fano 3-folds の平滑化の理論を応用し，端末特異点のタイプや境界因子の特異点やその正規化等について細い構造を決定した．

（２）研究２について：複素アフィン平面の Hirzebruch 曲面へのコンパクト化について，境界因子は２つの既約曲線からなるが，そのうちの１つの既約成分が特異点を持ち，もう１つの既約成分が非特異な場合の Brenton 氏による例を詳細に解析し，そのようなコンパクト化の一般的構成法を与え無数の例を構成した．更に，境界因子のいずれか一方は非特異な有理曲線であることも示し，境界因子の双有理的な構造を解明した．また，Abhyanka-Moh-鈴木の定理の証明の双有理幾何学的別証明の可能性も示唆した．

研究成果の概要（英文）：
(1) Research 1: The boundary of compactification of $\mathbf{C}^2$ into Hirzebruch surfaces consists of two irreducible components, one of which can have a singularity by L.Brenton. Then I can construct more general examples including the Brenton's one. I also prove that one of the irreducible components of boundary divisor is a smooth rationa curve. Further, I suggested the possibility of a birational geometric proof of the theorem by Abyankar-Moh- Suzuki.
(2) Research 2: I studied the detail structure of singular Fano threefolds with Gorenstein terminal singularities as a compactification of $\mathbf{C}^{3.}$,especially, applying the theory of smoothing of Fano threefolds with Gorenstein terminal singularities, I can determine the detail structure of the known examples of singular Fano compactifications of $\mathbf{C}^{3.}$.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２０１１年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１２年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4.030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何学，コンパクト化

１．研究開始当初の背景
（１）研究１について
第２ベッチ数１を持つ複素アフィン空間 $\mathbf{C}^3$ のモイシェゾンコンパクト化に現れる境界因子は既約な非正規モイシェゾン曲面である事はこれまでの研究で知られていた．境界因子については２つの場合が考えられる．まず，境界因子が"ネフ"の場合についてであるが，この場合は，ゴレンスタイン端末特異点を持つ Fano threefold への $\mathbf{C}^3$ のコンパクト化の構造の決定問題に帰着され，最近発展してきた Fano threefold の双有理幾何とも深く関係する事が分かっていた．一方，境界因子が"非ネフ"の場合は，そのようなコンパクト化が無限個存在する事が申請者によって示されるに至り，そのようなコンパクト化の分類そのものはあまり意味が無く．寧ろ，既存のコンパクト化への双有理型写像の具体的構成の問題を考える方が自然であり，現実的であろうと考えられる．申請者によって構成された無限個のコンパクト化の例を詳しく解明いく過程で，そのような双有理型写像の構成のヒントが得られるという確信はある程度あった．
（２）研究２について
第２ベッチ数２を持つ２次元複素アフィン平面 $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化はヒルツェブルフ曲面に同型で，そのときの境界因子は２つの既約成分からなるコンパクトな代数曲線であるが，この曲線が単純正規交差でれば，米国数学者のモロー氏の結果より，この境界因子の構造は完全に決定されているが，単純正規交差でない場合については，米国数学者ブレントン氏による例が１９７０年代に発表され，その後，森重文氏による $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化の双有理変換に関する研究はあったが，それ以外に，この方面の研究は途絶えていた．申請者は森重文氏による上記の研究に触発され,ヒルツェブルフ曲面の双有理自己同型の構造を詳細に調べることにより，コンパクト化の研究に繋がる幾つかのアイデアを得ていた．実際，未完成ながらも幾つかのこの方面の研究成果は得られていた．これらのアイデアや成果を再吟味すれば新たな視点での成果が得られるとの確信はあった．また，問題はアフィン代数幾何の基本定理である，アビヤンカー・モー・鈴木の定理と深く関係している事も分かっていたので，上記基本定理の双有理幾何学的別証明の可能性も高まっていたことも研究の背景にある．

２．研究の目的
（１）研究１について
第２ベッチ数１を持つ $\mathbf{C}^3$ のモイシェゾンコンパクト化の分類については，
①境界因子が"ネフ"の時は，第２ベッチ数１なる端末特異点を持つインデックス r（r=1,2）の Fano threefold への $\mathbf{C}^3$ のコンパクト化の分類に帰着されることは知られていたし，そのような例も申請者により発見されていた．従って，問題は，これらの例に尽きるかという一点であり，それに何らかの解答を与える事が研究の目的の一つであった．一方，境界因子は非正規既約代数曲面であり，その正規化や特異点解消についてはあまり解明されていなかったので，本研究でその構造を解明する事も目的とした．
②境界因子が"非ネッフ"の場合は無限個の例が存在し，分類問題ではなく，モイシェゾンコンパクト化の総有理幾何的な構造解明の問題が重要であることから，申請者によって定義されたある種の不変量をもとに構造の解明を行うことも目的とした．一方，非射影的モイシェゾン多様体についてはあまり研究がなされておらず，これを機に，モイシェゾン多様体の一般論を整理し，研究の新たな方向を探る事も目的とした．
（２）研究２について
第２ベッチ数２を持つ $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化の境界因子は２つの既約成分からなるが，この境界因子が単純性正規交差でない場合の構造を Hiezebruch 曲面の双有理自己同型の構造を用いて決定する事を目的とした．そこで，①２つの既約成分のどちらか一方は非特異であるという予想の証明を与える，また，その場合の境界因子の構造を解明する事及び，②複素アフィン幾何におけるアビヤンカー・モー・鈴木の定理の双有理幾何学的別証明を与える事も研究目的とした．

３．研究の方法
（１）大学院博士後期課程の学生に指示して，双有理代数幾何学に関するこの１０年間の結果や文献，論文等をアーカイブ等で調査させ，関連する論文を入手し紹介等を行わせた．
（２）一方で，近接分野の専門家から関連する最新の研究論文や研究者情報を入手し，その情報をもとに検討・討論を行い，当面する

問題に有効かつ応用可能な定理や命題をピックアップし，それらを問題に適用し，当該研究を推進した．
（３）また，ドイツの Max-Planck 数学研究所で開催される国際会議(Arbeitstagung)に出席し，関連分野の研究者や同研究所に長期滞在している多くの代数幾何学の研究者との交流を通して，研究の進捗状況等について報告し，新たなアイデアや情報の提供を受けた．
（４）更に，国内の学会や代数幾何関連の研究集会，代数幾何関連の研究者との研究打ち合わせを通して，結果の検証や新たなアイデアや研究の方向性についての知見を得る事ができた．

４．研究成果
（１）研究１について
$\mathbf{C}^3$ のコンパクト化としての第２ベッチ数が１でインデックス r（r=2,1）なるゴレンスタイン端末特異点をもつ Fano threefolds の構造および境界因子の構造について研究を行い以下の成果を得た．
①インデックス r=2 の時は，５次元複素射影空間内の２つの２次超曲面の完全交叉として得られる事はすでに申請者によって証明されていたが，全体構造を分かり難くしている要因に，境界因子の幾何的構造およびコンパクト化に現れる端末特異点の種類に関する情報の不足があった．境界因子については反標準層が豊富な非正規既約代数曲面であり，その正規化や最小特異点解消の構造もほぼ解明できた．実際，境界の特異点集合は既約な直線であり，その正規化は非特異有理曲線上の錐であり，最小特異点解消はヒルツェブルフ曲面である事が解明された．並河氏によるゴレンスタイン端末特異点を持つ Fano threefolds の smoothing に関する結果および smoothing による位相的な不変量の食違いに関する結果等を用いて，そのようなコンパクト化は唯一つの cAn 型の端末特異点をもち，その特異点からの射影の構造も完全に決定できた．
②インデックス r=1 の時は，種数１８の Fano threefold の中に $\mathbf{C}^3$のコンパクト化になっているものがある事は申請者により知られていたが，境界や端末特異点の構造については未解明であったが，本研究でコンパクト化には唯一つの cAn 型の端末特異点が存在し，また，境界因子の特異点は直線で，その正規化は有理２重点をもつ射影曲面であることも証明できた．こうして，残る問題は，インデックス r=1 の場合は，Fano threefold の種数が 18 であるか否かについてのみである．境界因子が”非ネフ”の場合は困難を極め，その正規化が射影代数曲面で，その最小特異点解消は非特異代数曲線上の特異ファイバーをもつ線織面であることまでは解明できた．また，境界因子の位相的な構造と代数幾何的構造について解明してゆく中で，境界因子の特異解消の上で adjunction theory を応用して，境界の詳細な構造を調べることができた．
（２）研究２について
第２ベッチ数２を持つ $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化はヒルツェブルフ曲面で，境界因子は２つの有理曲線からなることは知られていたが，本研究で以下の成果を得た．
①２つの既約成分のうちの一方は非特異有理曲線であることを示したが，その証明は多くの場合によってなされたので，証明を更に単純にしてゆく作業が残っている．また，境界因子の一方が非特異有理曲線であるような例はブレントン氏によって示されていたが，本研究では，この例を詳細に解析し，より一般的な例の構成法を与え，ブレントン氏の例を含む無限個の例の存在を示した．これにより，このようなコンパクト化の構造の全貌が見えて来た．結果はアフィン代数幾何の国際研究集会で講演し，Proceedings 論文として出版された．
②ヒルツェブルフ曲面の双有理変換を用いて，アフィン代数曲面論の基本定理であるアビヤンカー・モー・鈴木の定理について，条件付きではあるが，新たな視点からの双有理幾何的な別証明を与えた．この条件が外せれば幾何学的別証明を与えることになり，新たな研究の方向性の提案できた．具体的には，次の新たな問題と深い関係があることが分かった．
問題：ヒルツェブルフ曲面に含まれるアフィン代数曲面がホモロジーセルでならばアフィン平面であるか？
この問題の解決には新たなアイデアは必要と思われ，問題の解決より，解決に至る過程が重要であるように思える．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計 １ 件）

① 古島幹雄，石田明男， Hirzebruch surfaces and compactifications of $\mathbf{C}^2$, The Proceedings of the Conference on Affine Algebraic Geometry ,Osaka March 2011,査読有,World Science, 2013（近刊）

〔学会発表〕（計５ 件）

① 古島幹雄，$\mathbf{C}^3$ の非射影的コンパクト化について，２０１２年８月３０日，南九州第数系集会,熊本大学黒髪キャンパス（熊本）

② 古島幹雄，Compactifications of C^3，高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学，２０１２年3月１７日，九州大学伊都キャンパス数理学研究教育棟（福岡）

③ 古島幹雄，石田明男，Hirzebruch surfaces and compactifications of C^2，第７回アフィン代数幾何学研究集会，２０１１年３月６日，関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪）

④ 古島幹雄，Hiezebruch 曲面と C^2 のコンパクト化，日本数学会秋季総合分科会，2011.10.１，信州大学（松本）

⑤ 古島幹雄，大嶋康裕，フェルマー３次曲面についての一注意，日本数学会秋季総合分科会，2011.10.1，信州大学（松本）

６．研究組織

(1)研究代表者

古島　幹雄（FURUSHIMA MIKIO）

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：00165482

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：