

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 30 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540059

研究課題名(和文) アフィン代数多様体の構造と加法群の作用

研究課題名(英文) The structure of affine algebraic varieties and the additive group actions

研究代表者

増田 佳代 (MASUDA, Kayo)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40280416

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：アフィン代数幾何学において、アフィン空間は最も基本的かつ重要な対象である。しかし、高次元のアフィン空間の代数幾何学的特徴づけは、いまだ得られていない。高次元のアフィン空間のアフィン代数多様体における位置づけを明らかにすることを目標に、加法群の作用という観点から研究をおこなった。その結果、加法群の作用をもつ3次元アフィン代数多様体の構造についてある程度解明することを得た。

研究成果の概要(英文)：In affine algebraic geometry, affine space is the most fundamental and important object. However, we have not obtained the algebro-geometric characterization of affine space of higher dimension. In this project, trying to provide characterizations of affine spaces among algebraic varieties, we investigated the additive group actions on algebraic varieties of three or higher dimension, and succeeded in determining the structure of three-dimensional algebraic varieties in some cases.

研究分野：代数幾何学

キーワード：アフィンファイブレーション 加法群 代数群

1. 研究開始当初の背景

本研究課題の申請時点においては、アフィン代数幾何学における未解決3大問題—線形化問題、消去問題、埋め込み問題—がいずれもアフィン空間上の加法群の問題に帰着されることが示されたところであった。複素アフィン代数多様体 X 上の加法群の作用は、幾何学的には X 上の A^1 ファイブレーション構造に対応し、代数的には X の座標環上の局所べき零微分に対応する。加法群の作用に着目することにより、正規アフィン代数曲面の構造の決定という成果が得られたところであった。また、3次元アフィン空間の wild な自己同型についても知見が得られつつあり、3次元アフィン代数多様体の A^1 ファイブレーション構造や代数群の作用について、研究を進める上においての準備が整備されつつあった。3次元アフィン空間の自己同型群についての新たな知見が得られつつあったので、3次元アフィン空間上の有限巡回群の作用についてもなんらかの結果が得られるのではないかという期待感があった。

2. 研究の目的

線形化問題、消去問題、埋め込み問題の解決に向けての知見を蓄えることが本研究の大きな目的である。具体的には次の3点を見据えて研究をおこなった。

- (1) 3次元アフィン空間上の有限巡回群の作用の解明。
- (2) 擬アフィン空間上の代数群の作用の解明。
- (3) アフィン直線の3次元アフィン空間への埋め込み、アフィン平面の3次元アフィン空間への埋め込みの構造の解明。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者の増田は主に変換群論的視点から代数および代数幾何学的手法を用いて、研究分担者の宮西正宜氏は代数曲面論の豊富な知識と代数幾何学的手法を駆使して研究をおこなった。増田と分担者の宮西氏とは、必要に応じ、関西学院大学においてセミナーをおこなうことにより共同研究をおこなった。また、連携研究者の黒田茂氏とも必要に応じて研究交流をおこなった。

(2) アフィン代数幾何学の研究者は日本国内よりも海外のほうが多い。特に、M. Zaidenberg 教授 (Universite Grenoble I), R.V. Gurjar 教授 (TIFR), M. Koras 教授 (Warsaw University), P. Russell 教授 (McGill University), H. Flenner 教授 (Ruhr University) らはこの分野で活躍している研究者であり、彼らとは研究代表者、分担者とも親交がある。国内外での研究集会の機会をとらえて、彼らと討論することによって研究を推進した。

(3) 研究者が多く集まる研究集会は、情報交換や討論の重要な場である。国内外の研究集会に参加、発表するだけでなく、研究集会を開催することによって、研究交流の場を提供した。具体的には、2010年9月に関西学院大学大阪梅田キャンパスにおいて、国際研究集会 "Affine Algebraic Geometry" を開催した。また、2014年7月には、京都大学数理解析研究所において、数理解析研究所の援助のもと RIMS 国際研究集会 "Algebraic Varieties and Automorphisms Groups" を開催した。またさらに、研究代表者と分担者は、2008年から毎年3月と9月に関西学院大学大阪梅田キャンパスにおいて、アフィン代数幾何学研究集会を開催しており、本研究期間中も海外からも研究者を招聘して研究集会を開催した。2010年開催の国際研究集会については、講演内容をベースにした Proceedings を出版した。2014年開催の研究集会についても、Proceedings を出版予定である。

4. 研究成果

(1) 埋め込み問題は、affine modification とよばれる A^1 ファイブレーション構造をもつアフィン代数多様体の構造の解明に帰着されることが示された。特に、アフィン平面の3次元アフィン空間への埋め込みの問題は、埋め込みから定まる4次元 Danielewski 超曲面 X の構造の解明に帰着される。 X は擬アフィン空間とよばれるアフィン空間に近い空間である。埋め込み問題に反例があることは、 X がアフィン空間と同型でないか、線形化不可能な代数的トーラス群の作用をもつかのどちらかを意味する。さらに、affine modification 上の代数的トーラス群、あるいは有限群の作用は、消去問題のみならず線形化問題とも密接に関係していることがわかった。3次元アフィン空間上の有限巡回群の作用については、3次元アフィン空間の自己同型群について進展があまり得られなかったことから、新しい知見は得られなかったが、Danielewski 超曲面上の代数群の作用が今後明らかになっていけば、アフィン Cremona 群の構造の研究の進展と相まって解明されるであろうと期待される。

(2) Danielewski 超曲面上の A^1 ファイブレーション構造について、 A^1 ファイブレーション構造と加法群の作用との関係についていくつかの場合に解明した。特に、加法群の作用を用いた高次元 Danielewski 超曲面の特徴づけを与えた。

(3) A^1 ファイブレーション構造をもつ3次元代数多様体について、その A^1 ファイブレーションがいつ加法群の作用の商写像として得られるかなど、加法群の作用との関係を解明した。また、 A^1 ファイブレーション構造をもつ3次元代数多様体がいつアフィン空間となるかについて解明した。

(4) A^1 -ファイブレーション構造をもつ3

次元代数多様体について, その A^1 -ファイブレーションがいつ代数的トラス群の作用の商写像として得られるか, いくつかの場合に解明した.

(5) 3次元アフィン代数多様体の加法群の作用による商射の全射性についていくつかの場合に解明した.

(6) A^1 ファイブレーション構造をもつアフィン代数曲面の log deformation について研究をおこない, アフィンタイプのファイブレーション構造は log deformation のもとで保たれることを示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

1 K. Masuda, Characterizations of hypersurfaces of a Danielewski type, *J. Pure and Applied Algebra*, **218** (2014), 624–633, 査読有

DOI: 10.1016/j.jpaa2013.08.002

2 R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, Deformations of A^1 -fibrations, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **79** (2014), 327–361, 査読有, DOI:10.1007/978-3-319-056814-4-19

3 R.V. Gurjar, M. Koras, M. Miyanishi, P. Russell, A homology plane of general type can have at most a cyclic quotient singularity, *J. Algebraic Geometry*, **23** (2014), 1–62, 査読有

DOI:10.1090/S1056-3911-2013-00602-5

4 R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, Surjective derivations in small dimensions, *J. Ramanujan Math.Soc.* **28A** (2013), 221–246, 査読有

5 R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, A^1 -fibrations on affine threefolds, *Affine Algebraic Geometry, Proceedings of the conference in Osaka, 2011*, (2013), 62–102, 査読有

6 K. Masuda, Equivariant embeddings and semi-invariant locally nilpotent derivations, *Proceedings CAAG 2010, RMS Lecture Notes Series*, **17**, (2013), 167–184, 査読有

7 K. Masuda, M. Miyanishi, Algebraic derivations on affine domains, *Proceedings CAAG 2010, RMS Lecture Notes Series*, **17**, (2013), 185–198, 査読有

8 R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, A^1 -fibrations on affine threefolds, *J. Pure and Applied Algebra*, **216** (2012), 296–313, 査読有

DOI:10.1016/j.jpaa2011.06.013

9 R.V. Gurjar, M. Koras, M. Miyanishi, P. Russell, Affine normal surfaces with simply-connected smooth locus, *Math. Ann.*

353 (2012), 127–144, 査読有

DOI:10.1007/s00208-011-0675-y

10 K. Masuda, Equivariant derivations and additive group actions, *CRM Proceedings and Lecture Notes*, **53** (2011), 231–242, 査読有

11 M. Miyanishi, Frobenius sandwiches of affine algebraic surfaces, *CRM Proceedings and Lecture Notes*, **54** (2011), 243–260, 査読有

[学会発表](計 23 件)

1 宮西 正宜, Wild Z/pZ -actions on the affine plane, 野田代数幾何学シンポジウム, 2015年3月16日, 東京理科大学(千葉県野田市)

2 M. Miyanishi, Affine threefolds admitting G_a -actions, 第13回アフィン代数幾何学研究集会, 2015年3月7日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

3 M. Miyanishi, A^2 -fibrations on affine threefolds, Symposium on affine algebraic geometry, 2014年9月13日, 首都大学東京(東京都八王子市)

4 M. Miyanishi, Unipotent group actions on projective varieties, Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups, 2014年7月8日, 京都大学数理解析研究所(京都市)

5 K. Masuda, Locally nilpotent derivations, Conference on Automorphisms of Affine Varieties, 2014年2月17–18日, Kerala (India)

6 M. Miyanishi, Non-complete algebraic varieties, Conference on Automorphisms of Affine Varieties, 2014年2月19–21日, Kerala (India)

7 M. Miyanishi, Initiation to unipotent geometry, 第12回アフィン代数幾何学研究集会, 2013年9月7日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

8 M. Miyanishi, Deformations of A^1 -fibrations, 第11回アフィン代数幾何学研究集会, 2013年3月3日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

9 M. Miyanishi, Surjective vector fields on affine algebraic varieties, Groups of automorphisms in birational and affine geometry, 2012年11月1日, Trento (Italy)

10 M. Miyanishi, A^1 -fibrations and A^1 -fibrations on affine threefolds, The topology of algebraic varieties, 2012年9月27日, Montreal (Canada)

11 M. Miyanishi, Various aspects of vector fields on algebraic varieties, 第10回アフィン代数幾何学研究集会, 2012年9月8日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

12 M. Miyanishi, Vector fields on

algebraic varieties, International conference in affine algebraic geometry, 2012年8月1日, Jilin (China)

13 M. Miyanishi, A^1 -fibrations on affine threefolds, Birational and Affine Geometry, 2012年4月24日, Moscow (Russia)

14 M. Miyanishi, A^1 -fibrations on affine threefolds, 第9回アフィン代数幾何学研究集会, 2012年3月3日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

15 K. Masuda, Surjective derivations with non-constant kernels, 第9回アフィン代数幾何学研究集会, 2012年3月1日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

16 M. Miyanishi, ホモロジー平面と関連する話題, 日本数学会秋季総合分科会企画特別講演, 2011年9月30日, 信州大学(長野県松本市)

17 M. Miyanishi, Singularities of Z -homology planes of general type, 第8回アフィン代数幾何学研究集会, 2011年9月2日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪市)

18 K. Masuda, Algebraic derivations on affine domains, Conference "Complex analytic and algebraic trends in the geometry of varieties", 2011年8月16日, Montreal (Canada)

19 M. Miyanishi, Kernels of regular vector fields on affine threefolds, Conference "Complex analytic and algebraic trends in the geometry of varieties", 2011年8月16日, Montreal (Canada)

20 K. Masuda, G_a -actions on affine threefolds, 代数幾何・複素幾何セミナー, 2011年7月9日, 大阪大学(大阪府豊中市)

21 K. Masuda, Affine line fibrations on affine threefolds, 代数幾何学シンポジウム in 佐渡, 2011年6月3日, 佐渡島開発総合センター(新潟県佐渡市)

22 K. Masuda, A^1 -fibrations on affine threefolds I, International Conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2010年12月9日, Bangalore (India)

23 M. Miyanishi, A^1 -fibrations on affine threefolds II, International Conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2010年12月9日, Bangalore (India)

〔図書〕(計 1 件)

K. Masuda, H. Kojima, T. Kishimoto, Affine Algebraic Geometry, World Scientific Publishing Co., 2013, pp 340

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
増田研究室ホームページ
<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kayo>

宮西正宜のホームページ
<http://www10.plala.or.jp/masamiyanishi/miya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

増田 佳代 (MASUDA, Kayo)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 40280416

(2) 研究分担者

宮西 正宜 (MIYANISHI, Masayoshi)
関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員
研究者番号: 80025311

(3) 連携研究者

黒田 茂 (KURODA, Shigeru)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号: 70453032