様式 C-19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月３０日現在

機関番号：10101
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540061

研究課題名（和文）ミラー対称性の幾何学の研究

研究課題名（英文）Geometrical Study of Mirror Symmetry

研究代表者
秦泉寺　雅夫（JINZENJI MASAO）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20322795

研究成果の概要（和文）：ミラー対称性によるグロモフ‐ウィッテン不変量の計算に用いられるミラー写像を擬写像のモジュライ空間の幾何学的交点数の母関数として再構成し、ミラー対称性による計算過程をモジュライ空間のコンパクト化の違いを利用した計算方法として解釈した。またこの構成を利用して開いた弦に対するグロモフ‐ウィッテン不変量のミラー対称性による計算方法を広いクラスの多様体に対して拡張することに成功した。

研究成果の概要（英文）：We reconstructed the mirror map, which is used in the mirror computation of Gromov-Witten invariants, as a generating function of intersection numbers of the moduli space of quasi maps. With this result, we reinterpreted the mirror computation of Gromov-Witten invariants as a way of computing Gromov-Witten invariants by using the difference of compactification of the moduli space of holomorphic maps. We also used this reconstruction to generalize the mirror computation of open Gromov-Witten invariants to wide class of complex manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ミラー写像、ミラー対称性、モジュライ空間、交点数、固定点定理、擬写像

１．研究開始当初の背景

ミラー対称性は１９９１年に CP^4 の５次超曲面に対して発見されて以来２０年弱が経過したが、現在でもなお活発な研究が続けられてきており、様々な方向に発展している。ミラー対称性とは、種数ｇの２次元リーマン面からカラビ-ヤウ多様体 M への正則写像のモジュライ空間の交点数（これはグロモフ-ウィッテン不変量と呼ばれ、簡単な場合には正則写像の個数と解釈出来る）の母関数を、M のミラー多様体と呼ばれるもう一つのカラビ‐ヤウ多様体 M*の複素構造の変形から導かれるピカール‐フックス方程式の解を用いて構成する手法である。　この手法は超弦理論の観察から作業仮説的に発見されたものであり、その計算過程において、グロモ

フ - ウィッテン不変量の定義に用いられる正則写像のモジュライ空間が表面上全く現れないという特徴を持つ。

申請者は、ミラー対称性をカラビ - ヤウ多様体以外のクラスのケーラー多様体に拡張する問題について研究を進め、複素射影空間 $CP^{(N-1)}$内の k 次超曲面 M_N^k を例にとり、カラビ-ヤウ多様体（N=k の場合）
とは限らない超曲面のミラー対称性の計算手法を確立した。特に超曲面が non-nef と呼ばれる負に曲がった場合（$N<k$）の計算手法は非自明であり、独自の手法を開発する必要があった。　この場合の拡張に際して非常に重要な役割を果たしたのが、申請者の定義した仮想構造定数と呼ばれる量である。　これは、ミラー対称性の手法の出発点となるピカール-フックス微分方程式から、仮想ガウス - マニン系というものを介して求められる量であり、超曲面の量子コホモロジー環の構造定数となるグロモフ - ウィッテン不変量の類似物である。しかし、N が k 以下のときは両者は異なっている。一番大きな違いは、通常の構造定数においては、puncture equation というグロモフ - ウィッテン不変量の公理によって自明に 0 となる量が、仮想構造定数では 0 でなくなり、しかもそれがミラー対称性の計算の後半部分で主要な役割を果たすミラー写像の展開係数を与えるという事である。仮想構造定数は、このミラー写像から誘導されるミラー変換という操作を用いる事により、通常の構造定数である
グロモフ - ウィッテン不変量に翻訳されるのであるが、前文で述べた事と合わせてわかるとおり、仮想構造定数はミラー対称性の計算手法に必要な情報を全て含んでいるのである。

しかし、この仮想構造定数にはいくつかの問題点がある。
(1) これまでの結果においては仮想構造定数は $CP^{(N-1)}$内の k 次超曲面 M_N^k に対してしか定義されていない。
(2) ピカール - フックス微分方程式を仮定して得られる量なので、モジュライ空間の交点数というグロモフ - ウィッテン不変量のような明確な幾何学的意味づけが欠けている。

(2) の問題点に対しては、申請者には大まかな着想が以前からあり、それは以下のようなものであった。
「仮想構造定数は、グロモフ - ウィッテン不変量と同様に CP^1 から $CP^{(N-1)}$への正則写像のモジュライ空間の交点数としての意味を持つはずであるが、グロモフ - ウィッテン不変量がモジュライ空間の安定写像によるコンパクト化を用いているのに対して、仮想構造定数は異なるコンパクト化（おそらくもっとナイーブなトーリックコンパクト化）を用いて計算される交点数なのであろう。」

ここでいう、トーリックコンパクト化とは概念的に言うとモジュライ空間の点として通常の写像以外に有理写像も含めてコンパクト化する手法で、安定写像によるコンパクト化よりも簡単な空間が得られる。申請者は、近年 M_N^k に対する仮想構造定数に対する留数積分表示を得て、その表示をヒントに仮想構造定数をトーリックコンパクト化されたモジュライ空間上の交点数として具体的に計算する事に成功した}。そこで使われた道具は、現在グロモフ - ウィッテン不変量の計算で標準的に用いられる局所化定理(Bott 留数公式)であるが、申請者はこれを通常の安定写像でコンパクト化されたモジュライ空間に対してではなく、トーリックコンパクト化されたモジュライ空間に対して適用したのである。これにより、M_N^k に対する仮想構造定数、特にミラー写像の展開係数に幾何学的に明確な意味づけを与えた事になる。また、この手法は $CP^{(N-1)}$を底空間とするベクトル束のような開カラビ - ヤウ多様体に対してすぐ拡張でき、申請者は、以前 Brian Forbes 氏と行った non-nef な因子を持つ開カラビ - ヤウ多様体 $O(1)+O(-3)\rightarrow CP^1$ に対して応用した。　その結果、Forbes 氏と得ていたこの模型のミラー写像の展開係数を全く新しい形で得たのと同時にグロモフ - ウィッテン不変量も計算する事ができた。
これは、上の(2)の問題点に対する最初の突破口、つまり一般的に仮想構造定数を計算できる可能性を示唆しているのである。このような状況が研究当初の背景としてあった。

２．研究の目的
以上のような状況を踏まえて明らかにしたいことは、まず上に挙げた(2)の問題に対する出来るだけ一般的な解答を与える事である。とくに、$CP^{(N-1)}$以外のより一般のトーリック多様体に対して、モジュライのトーリックコンパクト化に対する局所化定理の応用を実行できるかを探りたい。現在では、かなり一般のトーリック多様体のモジュライ空間のトーリックコンパクト化についての研究が進んでいるので、十分成果が見込める課題である。

次に、この幾何学的構成から、仮想構造定数をグロモフ - ウィッテン不変量に翻訳するミラー変換をコンパクト化の違いを修正するプロセスとして記述する理論を完成する事を目標とする。その基本的な着想とは、Kontsevich の開発した、安定写像のモジュラ

イ空間に対して固定点定理を適用する手法により得られた結果を、留数積分表示に翻訳する事である。　このようにして得られた留数積分表示は、申請者が仮想構造定数の幾何的構成において作った留数積分表示と基本的に同じ構造をしており、両者を比較する事により、機械的にミラー変換を導出し、証明する事ができるのである。

３．研究の方法
まず、仮想構造定数の幾何学的構成を広いクラスのトーリック多様体に拡張する問題であるが、これに関しては２つのケーラー類を持つ一般のヒルツェブルフ曲面の場合には、ほぼ成功している。ただし、この場合まだ幾何学的に意味が明快でない因子を付け加えなければならない事がわかってきていて、その理由を完全に明らかにして理論を完成させる事を最初の目標としたい。次により一般の場合として重みつき射影多様体の場合に仮想構造定数を幾何学的に構成する問題に取り組みたい。特に手近な目標として挙げられるのは、ミラー対称性の応用によく用いられるカラビ－ヤウ多様体の ambient space となっている２つのケーラー類を持つ重みつき射影空間である。 このような空間の定義を眺めてみると、基本的に、射影空間上の自明でない複素ベクトル束の射影化の構造をしており、非自明さがヒルツェブルフ曲面と高次元射影空間の組み合わせに過ぎないことが分かる。したがって、このような例もこれまでのノウハウの組み合わせで十分達成可能である。　これらの具体例で経験を積めば、一般的なトーリック多様体への拡張はすぐに出来るであろう。また、(1) の課題の達成には、ミラー変換をコンパクト化の違いを修正するプロセスとして説明しきる事が必要である。この議論の糸口となるのは、以下のような着想である。まず前半は、Kontsevich による通常のグロモフ－ウィッテン不変量を固定点定理により計算した結果を、留数積分表示に書き直すプロセスである。これはある程度機械的に出来るが、系統的な書き直しの規則と、その一般的な証明を完成させる事が当面の課題である。この作業を上の課題と並行させながら取り組む。また後半部分は、こうして得られた留数積分表示を仮想構造定数の留数積分表示と比較してミラー変換を導出する事である。そこで鍵となるのは、一般ミラー変換における計算過程を詳細に見直す事である。そこで行われている作業を要約すると以下のようになる。

(1) 仮想構造定数（これは２点関数と解釈される）を初期条件として、多点関数（これはトーリックコンパクト化をしたモジュライ空間で計算したものと解釈される）を計算する。
(2) 上の多点関数を元データとして、コンパクト化の違いにより生じる補正効果を取り入れる。

現在、２点関数（つまり仮想構造定数）の留数積分表示は既に得ており、これから多点関数を計算する方法は一般ミラー変換における私の論文に与えられている。したがって原理的に多点関数の留数積分表示の公式が得られるはずである。申請者は現在の所、この多点関数が non-nef な場合のミラー予想について基本的な役割を果たしている以上、その留数積分表示も幾何学的に意味深い式になるに違いないと期待している。そこで、この課題を前半の課題が達成された後に取り組む事にする。　実は、この目標が達成されれば、この課題の目標の一つである、ミラー対称性の予想する公式の幾何学的に explicit な証明はほとんど完成する事になる。というのも、この留数積分表示と上の(2)のプロセスを実行して得られるミラー予想から来るグロモフ－ウィッテン不変量の留数積分表示と Kontsevich の結果を翻訳して得られる留数積分表示が一致する事を示せば、それで証明としては終了するからである。 ここで示したプログラムは、作業としては十分実行可能であるが、かなりの計算量を必要とするので継続的に取り組む事にする。

４．研究成果
期間中の研究の進展によって、一般のトーリック多様体について仮想構造定数を構成する問題は、いくつかの自明でない例について実際に構成し、その母関数を複数個構成すると、その一部がミラー写像となり、他のものはミラー写像によるミラー変換でグロモフ－ウィッテン不変量の母関数に翻訳されることを確かめた。この成果を、仮想構造定数に関する一般的予想としてまとめた論文を発表した。なお、この予想は２０１３年に Bumsig Kim 氏と Ciocan Fontaine 氏による論文で一般的に証明された。ミラー予想の幾何学的直接証明としては、次数３までの超曲面に対する種数０のグロモフ－ウィッテン不変量に対する予想に対して直接証明を与え、論文として発表した。その後の研究の進展により、３で挙げた直接証明に対する組み合わせ論的な複雑さによる困難はほぼ解決された。しかし、Kontsevich の計算結果を留数積分に書き直す場合に対角アノマリーという困難が現れ、これについては今後の研究課題として研究を継続したい。また、期間中の進展によって、当初予定していなかった方向の成果が得られた。これは、仮想構造定数を開いた弦に対して拡張することに成功した事と、多点仮想構造定数を定義し、計算するこ

とに成功したことである。これを用いるとコンパクト多様体に対しては、カラビーヤウ３次元多様体に対してしかできていなかった開弦に対するグロモフ‐ウィッテン不変量のミラー対称性による計算を一般の複素射影空間の超曲面に対して拡張できる。この成果の前半部分を論文として発表し、また後半部分を２０１３年５月にプレプリントとして発表した。また、これらの成果を日本数学会をはじめとする国内研究集会、および海外での研究集会やセミナーで発表した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）

①Open Virtual Structure Constants and Mirror Computation of Open Gromov-Witten Invariants of Projective Hypersurfaces. Masao Jinzenji, Masahide Shimizu. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics（査読あり）に掲載予定

②Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers: Toric Manifolds with Two Kähler Forms. Masao Jinzenji. Communications in Mathematical Physics（査読あり）に掲載予定

③Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers. Masao Jinzenji. Lie Theory and its Applications in Physics IX. International Workshop Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 36. （査読あり）(2013) 181-189.

④ Direct Proof of Mirror Theorem of Projective Hypersurfaces up to degree 3 Rational Curves. Masao Jinzenji. Journal of Geometry and Physics, Vol. 61, Issue 8, (2011) （査読あり） 1564-1573.

〔学会発表〕（計５件）

① 秦泉寺　雅夫.　2013 年 3 月 22 日. 日本数学会 2013 年　年会(於京都大学).（一般公演）.
" Multi-Point Virtual Structure Constants and Mirror Computation of CP^2-model". （京都市）

② Masao Jinzenji. 2011 年 12 月 1 日. Seminar on Symplectic Geometry and Mathematical Physics. Beijing International Center for Mathematical Research.
"Open Virtual Structure Constants and Mirror Computation of Open Gromov-Witten Invariants of Projective Hypersurfaces". (北京、中国)

③ 秦泉寺　雅夫.　2011 年 11 月 11 日.　首都大学東京幾何学セミナー.
"Open Virtual Structure Constants and Mirror Computation of Open Gromov-Witten Invariants of Projective Hypersurfaces" . (八王子市)

④ Masao Jinzenji. 2011 年 6 月 21 日. International Workshop: LIE THEORY AND ITS APPLICATIONS IN PHYSICS. Bulgarian Academy of Sciences,
Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy.
"Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers". (バルナ、ブルガリア)

⑤ 秦泉寺　雅夫　2010 年 9 月 22 日.
日本数学会 2010 年秋季総合分科会（於名古屋大学）.（一般公演）.
"Mirror　Map as Generating Function of Intersection Numbers".　(名古屋市)

６．研究組織
(1)研究代表者
秦泉寺　雅夫　（JINZENJI MASAO）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20322795

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし