

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月15日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540064

研究課題名（和文） 共形一次微分形式による積分表示を用いた周期的曲面の研究

研究課題名（英文） Study on periodic surfaces using their representations by integrals of conformal one-forms

研究代表者

守屋 克洋 (MORIYA KATSUHIRO)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：50322011

研究成果の概要（和文）：

研究協力者の Katrin Leschke 氏とユークリッド空間内の極小曲面とその Lopez-Ros 変形と、極小曲面に対応する 2 種類の平坦接続の族の dressing 変換の関連の仕方を明らかにした。この研究結果を国内外の研究会やセミナーで発表した。

調和逆平均曲率曲面の一般化とその変換について得られた研究結果を講演した。この結果は査読付き国際学術雑誌に掲載された。

複素正則関数についての Schwarz の補題の類似か、四次元ユークリッド空間内の超共形曲面においても成り立つことを示し、講演した。この結果を含む研究結果を国際学術誌に投稿した。

複素正則一次微分形式の Riemann の双線形関係を一般化し、周期的曲面の存在するための条件を得て、研究結果をまとめた論文を作成し、査読付き国際学術誌に投稿した。

研究成果の概要（英文）：

The correspondence between the Lopez-Ros deformation of a minimal surface in Euclidean (four-)space and the dressing transformations of two families of flat connections associated with a minimal surface was cleared by the joint work with Dr. Katrin Leschke. This result was presented in domestic or foreign conferences and seminars.

A generalization of harmonic inverse mean curvature and their transforms was studied. The result was published in an international journal.

An analog of the Schwarz lemma for super-conformal surfaces in four-dimensional Euclidean space is obtained. A preprint about this result was written and submitted to an international journal.

Generalizing the Riemann bilinear relation for holomorphic one-forms, a condition for the existence of periodic surfaces was obtained. A preprint about this result was written and submitted to an international journal.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：曲面

1. 研究開始当初の背景

四次元ユークリッド空間内の曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ は、次の積分表示を持つ：

$$f = \int df$$

\mathbb{R}^4 と四元数全体 \mathbb{H} を同一視するとき、 df は共形一次微分形式とよばれるものであることが、四元数的ベクトル束の理論の発展により、判明した。リーマン面 (M, J^*M) 上の共形一次微分形式とは $*\omega = N\omega$ をみたす四元数値関数 $N: M \rightarrow \mathbb{H}$ が存在するような四元数値一次閉微分形式 ω のことである。 N を左法ベクトルと呼ぶ。

ユークリッド空間内の極小曲面については、ワイエルシュトラス表現公式とよばれる積分表示がある。筆者は[7]において、積分表示を用いて、対称な極小曲面の構成}を行っていた。[4]などでは、積分表示が三次元ユークリッド空間内の周期的極小曲面の研究に活用されて、研究が発展している。ここで、 n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内の一次独立なベクトルにより生成される平行移動の群の離散部分群を P とするとき、 \mathbb{R}^n/P 内の曲面を周期的曲面とよび P を曲面の周期とよぶ。一般の周期的曲面については、[8]などがあるものの、あまり研究が進んでいなかった。そこで積分表示を用いて、一般の周期的曲面を研究するという発想に至った。

四元数的ベクトル束の理論は、可積分系と関わる曲面の理論と、四次元共形球面内の曲面の共形幾何学に強力な手段を提供する([1]). Leschke, Pedit, Pinkall, Bohle らは、四元数的ベクトル束を用いて、曲面の共形幾何学における基本的な問題である、ウィルモア予想の解決につながる論文を次々と発表していた([3]など)。この予想の解決のために、四元数的ベクトル束の理論を整備することが重要な研究課題となっていた。

長谷川和志の曲面のツイスター・リフトと調和切断の研究[2]は、四元数的ベクトル束の理論のある種の一般化となっている。

筆者は、四元数的ベクトル束の理論を応用して、以下のような関連研究を行っていた。

① (ハミルトンの極小) ラグランジュ曲面をラグランジュ曲面の商で表す研究をし、分母に現れるラグランジュ曲面の分類を行った([6])。② 制限ウィルモア曲面に適用できる曲面の変換公式を与え、これをさらに応用して、超共形曲面と複素正則零曲線との対応を得た([5])。③ 曲面と対応する tt^* 束を応用した、 tt^* 束の構成方法と曲面の理論への応用を黒須早苗と共同研究中であった。

参考文献

[1] Burstall, F. E., Ferus, D., Leschke, K., Pedit, F.

and Pinkall, U., Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions, Lecture Notes in Mathematics 1772, 2002, Springer.

[2] Hasegawa, K., On surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, J. Geom. Phys. 57 (2007), no.~7, 1549--1566.

[3] Leschke, K. and Pedit, F., Sequences of Willmore surfaces, Math. Z. 259 (2008) no.~1, 113--122.

[4] Meeks, W. H., III, The theory of triply periodic minimal surfaces, Indiana Univ. Math. J. 39 (1990), no. 3, 877--936.

[5] Moriya, K., Super-conformal surfaces associated with null complex holomorphic curves, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009) no.~2, 327--331.

[6] Moriya, K., The denominators of Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane, Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008) no.~1, 1--20.

[7] Moriya, K., A space of minimal tori with one end and cyclic symmetry, Tsukuba J. Math. 30 (2006), no. 1, 131--135.

[8] Ros, A., Isoperimetric inequalities in crystallography. J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 2, 373--388.

2. 研究の目的

周期的曲面の存在または非存在のための左法ベクトル N 、周期 P のみならず十分条件を求める。

周期的曲面にたいして、表のように共形一次微分形式が対応する。

	\mathbb{R}^n 内の曲面	周期的曲面
共形一次微分形式	完全	閉, 非完全

N を固定するとき、共形一次微分形式全体は右四元数的ベクトル空間になる。そこで共形一次微分形式の空間の次元の評価をする。

共形一次微分形式 ω にたいし、

δ にたいし $\int_{\delta} \omega$ で定義される写像 $\Phi: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{H}$ は、

$\int_P \omega$ が周期 P の周期的曲面である場合、 $\pi_1(M)$ から P への全射準同型となる。

そこで Φ を解析して、 $\int_P \omega$ が周期的曲面になる十分条件を明らかにする。左法ベクトル N は曲面のガウス写像と密接に関連して

いる。 N によって特徴づけられる曲面として、極小曲面、平均曲率一定曲面、超共形曲面、制限ウィルモア曲面、(ハミルトンの極小)ラグランジュ曲面がある。これら具体的な曲面についても同様に研究する。

3. 研究の方法

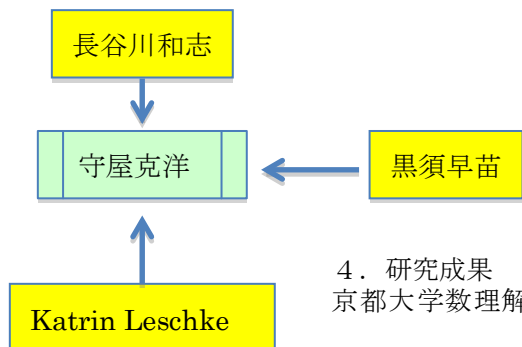
本研究は、次の研究体制で遂行される。

分類	氏名	役割
研究代表者	守屋克洋	研究全体のとりまとめ
連携研究者	長谷川和志	曲面のツイスター・リフトと調和切断との関連について研究
連携研究者	黒須早苗	可積分系の理論の輪環面の研究への応用について研究協力
研究協力者	Katrin Leschke	四元数的ベクトル束の最新の研究状況について研究協力

Katrin Leschke には、本研究の土台としての、四元数的ベクトル束の理論の整備について、黒須早苗には、 tt^* 束に対応するスペクトル曲線を用いた輪環面の構成について、長谷川和志には、四元数的ベクトル束の理論の一般化から本研究を見て得られる研究方針について協力を請う。

本研究は関連する分野が多岐にわたるので、協力者を必要とする。連携研究者、研究協力者ともに関連する先行研究があり、それぞれ得意とする分野が異なり、下図のように役割を分担して、本研究の協力者として妥当である。

連携研究者、研究協力者とは、各年度、ビデオ・チャット等で打ち合わせしたうえで、互いの所属大学を訪問または招待して、研究をすすめる。



析研究所における RIMS 研究集会「部分多様体と四元数構造」で、四元数的正則幾何とその応用としての極小曲面のシンフル・ファクター・ト レッシング について得られた研究結果を講演した。筑波大学微分幾何学火曜セミナーにおいて同内容を講演した。この結果を論文にまとめるために、共同研究者の英国レスター大学 Katrin Leschke 氏を日本に招待し、一ヶ月かけて論文の作成を行った。滞在中に Leschke 氏が東京工業大学において行われた研究会「Mini Workshop on Differential Geometry」において得られた研究結果を発表し、そこで 神戸大学ウェイン・ラスマン氏と議論したことによって進展した結果を大阪市立大学における第5回国際ワークショップ「微分幾何学と幾何解析」において講演した。また、調和逆平均曲率曲面の一般化とその変換について得られた研究結果を講演した。この結果は査読付き国際学術雑誌に掲載された。山口県山口市で、行われた研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」— Willmore 曲面について — において、Pedit と Leschke によるウィルモア曲面のタルフー変換についての論文を解説した。大阪市立大学における第5回国際ワークショップ「微分幾何学と幾何解析」で、複素正則関数についての Schwarz の補題の類似か、四次元ユークリッド空間内の超共形曲面においても成り立つことを示した結果について講演した。この結果を含む研究結果を論文にまとめ arXiv にアップロードし、査読付き国際学術誌に投稿した。また、本研究課題の研究期間に得られた周期的曲面についての研究結果をまとめた論文を作成し、査読付き国際学術誌に投稿した。関連する研究課題について中国清華大学馬輝氏を Leschke 氏と同時期に日本に招待して議論を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. Moriya, Katsuhiko, Darboux transforms of a harmonic inverse mean curvature surface. 査読有り, Geometry, vol. 2013, Article ID 902092, 9 pages, 2013, doi:10.1155/2013/902092.

2. Moriya, Katsuhiko, A condition for a closed one-form to be exact. 査読有り, Adv. Appl. Clifford Algebr. 22, No. 2, 433-448, (2012), doi:10.1007/s00006-011-0313-5.

3. Kurosu, Sanae and Moriya, Katsuhiko, A

tt^* -bundle associated with a harmonic map from a Riemann surface into a sphere. 査読有り, Differ. Geom. Appl. 30, No. 3, 227-232 (2012), doi:10.1016/j.difgeo.2012.04.003.

4. 守屋 克洋, Description of a mean curvature sphere of a surface by quaternionic holomorphic geometry (Submanifolds and Quaternion structure), 査読無し, 数理解析研究所講究録, 1817, 1-5, 2012年11月, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1817-01.pdf>

5. 守屋 克洋, Simple factor dressing of a minimal surface (Submanifolds and Quaternion structure), 査読無し, 数理解析研究所講究録, 1817, 6-10, 2012年11月, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1817-02.pdf>

[学会発表] (計 14 件)

1. Katsuhiro Moriya, Surfaces with vanishing Willmore energy in Euclidean four-space, The 5th OCAMI-TIMS Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis (March 25 (Mon)– March 27 (Wed), 2013), 2013/03/26, 大阪市立大学 大学院理学研究科

2. 守屋克洋, リーマン面上の四元数的正則直線束とウィルモア曲面 (3), 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」— Willmore 曲面について — (2013年2月14日–2月16日), 2013/02/16, 山口県健康づくりセンター

3. 守屋克洋, リーマン面上の四元数的正則直線束とウィルモア曲面 (2), 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」— Willmore 曲面について — (2013年2月14日–2月16日), 2013/02/15, 山口県健康づくりセンター

4. 守屋克洋, リーマン面上の四元数的正則直線束とウィルモア曲面 (1), 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」— Willmore 曲面について — (2013年2月14日–2月16日), 2013/02/15, 山口県健康づくりセンター

5. 守屋克洋, 極小曲面のシンプル・ファクター・ドレッシング, RIMS 研究集会 部分多様体と四元数構造(2012年6月25日–27日), 2012/06/26, 京都大学数理解析研究所

6. 守屋克洋, 四元数的正則幾何による曲面

の平均曲率球面の説明, RIMS 研究集会 部分多様体と四元数構造(2012年6月25日–27日), 2012/06/25, 京都大学数理解析研究所

7. 守屋克洋, 四元数的正則微分形式の層を係数とするリーマン面のコホモロジー, 日本数学会年会一般講演, 2012/03/26, 東京理科大学理学部

8. 守屋克洋, リーマン面上の四元数的正則微分形式の層のコホモロジー, 曲面論小研究集会, 2012/03/19, 東京工業大学

9. Katsuhiro Moriya, Transforms for neutral surfaces and timelike surfaces, 清華大学数学科学系学術報告, 2011/09/07, 清華大学(中国),

10. 守屋克洋, 曲面上のベクトル値完全一次微分形式, 大阪市立大学数学研究所微分幾何学セミナー, 2011/03/30, 大阪市立大学

11. Katsuhiro Moriya, Surfaces of constant mean curvature with symmetry, Sminars in Pure Mathematics, 2011/03/17, University of Leicester, UK

12. Katsuhiro Moriya, Twistor para-holomorphic maps from a Lorentz surface to the fourdimensional pseudosphere with neutral signature, Lie 変換群と複素幾何学, 2010/09/28, 新潟県湯沢町

13. 守屋克洋, 球面への調和写像に付随する tt^* 束, 日本数学会秋期総合分科会, 2010/09/24, 名古屋大学東山キャンパス

14. 守屋克洋, 周期的等温曲面の周期について, 日本数学会秋期総合分科会, 2010/09/24, 名古屋大学東山キャンパス

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/read0062169>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

守屋 克洋 (MORIYA KATSUHIRO)
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号: 50322011

(2) 連携研究者

長谷川 和志 (HASEGAWA KAZUYUKI)
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号: 50349825

黒須 早苗 (KUROSU SANAE)

東京理科大学・理学部・助教
研究者番号：70457844