

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540070

研究課題名(和文) アファイン微分幾何を核とする部分多様体論、可積分系、変分法の相互作用

研究課題名(英文) Interaction of submanifold theory, integrable systems and variational method with a focus on affine differential geometry

研究代表者

藤岡 敦 (FUJIOKA, Atsushi)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：30293335

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)： チェビシェフ作用素が半単純でない平坦中心アファイン曲面について調べ、ピック不変量が一定のものはマイヤー-G関数を用いて表される中心アファイン極小曲面であることが分かった。また、原点を中心とする固有アファイン球面の自然な一般化である中心アファイン極小曲面を射影空間内の曲面とみなし、中心アファイン極小曲面としての随伴曲面がすべて射影極小となるものを分類した。

また、複素化された球面内の複素直交網により径数付けられた曲面について調べた。更に、等積中心アファイン平面閉曲線全体のなす空間に可算個の前シンプレクティック構造を導入し、この空間が多重ハミルトン系によって記述されることを示した。

研究成果の概要(英文)： We studied flat centroaffine surfaces with non-semisimple Tchebychev operator and showed that if the Pick invariant is constant then it is a centroaffine minimal surfaces described by the Meijer G-function. We also regarded centroaffine minimal surfaces, which is a natural generalization of proper affine spheres centered at the origin, as surfaces in the projective space and classified such surfaces whose associated surfaces are projective minimal.

We also studied surfaces in the complexified sphere parametrized by a complexified orthogonal net. Moreover, we introduced the countably infinite number of presymplectic structures on the space of closed equicentroaffine plane curves and showed that such a space can be described by multi-hamiltonian system.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：アファイン微分幾何 部分多様体論 可積分系 変分法

1. 研究開始当初の背景

平均曲率一定曲面はボンネ曲面とよばれる平均曲率を保ちながら等長的に変形できる曲面の例であるが、パンルヴェ方程式との関係から示されるように、ボンネ曲面は可積分系理論的観点から見た平均曲率一定曲面の自然な一般化とみなせる。同様に、調和逆平均曲率曲面とよばれる曲面も平均曲率一定曲面の自然な一般化とみなされるが、その他に定曲率曲面、原点を中心とする固有アファイン球面の一般化として、それぞれピアンキ曲面、中心アファイン極小曲面とよばれる曲面が知られている。このような可積分系理論と関わる曲面としてはウィルモア曲面や共形曲率線座標をもつ曲面とよばれるものも知られている。

上述の曲面達の中でも、中心アファイン極小曲面は調和逆平均曲率曲面と並んで比較的新しく研究対象とされたものであるが、ユークリッド空間内の超曲面に対して中心アファイン計量の面積を汎関数とした変分問題の解として定義された。一方、中心アファイン計量が不定値の場合には原点からの等積アファイン支持関数の対数が漸近線座標に関してローレンツ調和なものとして定義されており、中心アファイン極小曲面は調和逆平均曲率曲面やピアンキ曲面の中心アファイン微分幾何版ともみなせる。従って、変分法的特徴付けの知られていない調和逆平均曲率曲面、ピアンキ曲面に対して、中心アファイン極小曲面は中心アファイン微分幾何そのものから見て興味深いのみならず、可積分系や変分法の立場からも見直すことが可能であり、研究対象として大きな余地が残されている。

一方、離散化を伴う曲線の可積分な運動に関して、複素射影直線上の曲線の運動として曲率が KdV 方程式に従うものを離散化したものや複素双曲線上の曲線の運動として曲率が高次バーガーズ方程式に従うものが知られている。また、曲率が KdV 方程式に従う等積中心アファイン平面曲線の運動を一般化し、高次 KdV 方程式が現れる運動についても考察することができる。

2. 研究の目的

中心アファイン極小曲面に代表されるような、アファイン微分幾何的な対象を部分多様体論的観点のみでなく、可積分系や変分法的観点も考慮に入れて考察していくことによって、分類問題や特徴付けを考察し、今までに知られていなかった新しい例も見つけていくこと等を手掛かりとして、背後に控えていると期待される幾何的対象の大きな対称性の理解へと繋げていく。

3. 研究の方法

中心アファイン極小曲面について、中心アファイン計量、ピック不変量、中心アファインチェビシェフ作用素等の中心アファイン曲面の不変量に注目し、分類問題や特徴付け等の考察を行う。また、高次元化、即ち中心アファイン極小超曲面も研究対象とし、平坦な中心アファイン計量をもつ中心アファイン超曲面にも考察の対象を拡げる。更に、それらの成果を関連させながら、アファイン微分幾何的対象を広く扱い、新たな研究課題へと繋げる。

各年を通して、関連分野で先駆的な業績を挙げられている数学者達との研究交流を行う中で、研究課題を遂行していく。

4. 研究成果

チェビシェフ作用素が半単純でない平坦中心アファイン曲面について調べ、ピック不変量が一定のものはマイヤー-G 関数を用いて表される中心アファイン極小曲面であることが分かった。また、原点を中心とする固有アファイン球面の自然な一般化である中心アファイン極小曲面を射影空間内の曲面とみなし、中心アファイン極小曲面としての随伴曲面がすべて射影極小となるものを分類した。特に、研究代表者自身によって発見されていた中心アファイン極小曲面を射影極小曲面や等温漸近的曲面の言葉で特徴付けることができた。

また、曲線の可積分な運動に関して、複素化された球面内の曲面に対して複素直交網による径数付けなる概念を導入し、このように径数付けられた曲面の基本的な性質および具体的な例を与えた。更に、等積中心アファイン曲線の運動に付随して現れる KdV 方程式を無限次元ハミルトン系として記述する際に用いるハミルトン関数を用いて、等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間の等位集合を考え、これらの集合がいわゆる多重ハミルトン構造を持つことを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 4 件)

- 1 Atsushi Fujioka and Takashi Kurose, Multi-Hamiltonian structures on spaces of closed equicentroaffine plane curves associated to higher KdV flows, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 査読有、10、048、2014、11pages
- 2 Atsushi Fujioka, Hitoshi Furuhashi and Takeshi Sasaki, Projective minimality for centroaffine minimal surfaces, *Journal of Geometry*, 査読有、105、2014、87-102

- 3 Atsushi Fujioka, Flat centroaffine surfaces with non-semisimple Tchebychev operator, Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related Topics, Saga, August 4-6, 2012, 査読有、2013、180-189
- 4 Atsushi Fujioka, Surfaces in the complexified sphere parametrized by a complex orthogonal net, JP Journal of Geometry and Topology, 査読有、10、2010、89-98

〔学会発表〕(計19件)

- 1 藤岡 敦, 射影極小な中心アフィン極小曲面、淡路島幾何学研究集会 2014、2014年1月26日、国民宿舎 慶野松原荘
- 2 藤岡 敦, 射影および中心アフィン極小曲面、大分幾何学セミナー、2013年9月7日、ゆふいん七色の風
- 3 藤岡 敦, 中心アフィン極小曲面と射影微分幾何、幾何セミナー、2013年6月3日、大阪大学
- 4 藤岡 敦, 等積中心アフィン曲線と多重 Hamilton 構造、若狭三方幾何学研究集会 2013、2013年3月18日、若狭町観光ホテル水月花
- 5 藤岡 敦, Differential geometry of projective or centroaffine surfaces, 統計多様体の幾何学とその周辺 (4)、2013年3月2日、北海道大学
- 6 Atsushi Fujioka, Multi-Hamiltonian structures associated with the space of closed equicentroaffine curves, Workshop on Curve flows and integrable systems, 2012年12月7日、早稲田大学
- 7 藤岡 敦, 等積中心アフィン平面閉曲線のなす空間に付随する多重 Hamilton 構造、シンプレクティック幾何とその周辺2012、2012年11月20日、放送大学秋田学習センター
- 8 Atsushi Fujioka, Centroaffine minimal surfaces, 第18回複素幾何シンポジウム、2012年10月26日、プチホテル ゾンタック
- 9 藤岡 敦, 曲線の射影微分幾何、OCU48 セミナー、2012年5月12日、大阪市立大学
- 10 藤岡 敦, 中心アフィン曲面の中心写像、曲面論小研究集会、2012年3月20日、東京工業大学
- 11 Atsushi Fujioka, Bi-Hamiltonian structures on the spaces of curves, The 4th TMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2012年3月17日、

- National Taiwan University
- 12 藤岡 敦, 中心アフィン極小曲面、Kunitachi One-Day Symposium on Mathematical Sciences, 2012年2月4日、一橋大学
- 13 藤岡 敦, 曲線の運動と多重 Hamilton 系、淡路島幾何学研究集会 2012、2012年1月29日、国民宿舎 慶野松原荘
- 14 藤岡 敦, Flat centroaffine minimal surfaces, Geometry and something 2011、2011年11月4日、福岡大学
- 15 藤岡 敦, アフィン微分幾何と可積分系、淡路島幾何学研究集会 2011、2011年2月13日、国民宿舎 慶野松原荘
- 16 藤岡 敦, 平坦な中心アフィン極小曲面、幾何学コロキウム、2011年2月4日、北海道大学
- 17 藤岡 敦, 中心アフィン極小曲面の自己合同性、微分幾何学セミナー、2011年1月19日、大阪市立大学
- 18 藤岡 敦, Tchebychev 作用素の消えない中心アフィン極小曲面、部分多様体論・湯沢2010、2010年11月25日湯沢グランドホテル
- 19 藤岡 敦, 中心アフィン極小曲面と Meijer の G 関数、部分多様体幾何とリー群作用、2010年9月10日、東京理科大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~afujioka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤岡 敦 (FUJIOKA, Atsushi)
関西大学・システム理工学部・教授
研究者番号：30293335

(2) 研究分担者

(なし)

研究者番号：

(3) 連携研究者

(なし)

研究者番号：