

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年3月31日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540071

研究課題名（和文）概エルミート多様体の幾何学及び関連した話題の研究

研究課題名（英文）Almost Hermitian geometry and the related topics

研究代表者

関川 浩永（SEKIGAWA KOUEI）

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：60018661

研究成果の概要（和文）：概複素多様体において、その概複素構造が線形等長的であるようなリーマン計量を併せ考えたものを概エルミート多様体という。本研究においては、概エルミート多様体の積分可能性に関するいくつかの話題及び古田汎関数（アインシュタイン・ヒルベルト汎関数の概エルミート版）に関する各種変分問題についていくつかの興味深い結果を得た。さらに、標準的な接触計量構造を持った単位接球面束で、その特性ベクトル場が調和ベクトル場であるようなものについていくつかの結果を得た。また、本研究を遂行する過程において提起された問題についても望外の研究成果をあげることが出来た。

研究成果の概要（英文）：An almost complex manifold equipped with a compatible Riemannian metric is called an almost Hermitian manifold. In our research project, we obtained several interesting results on the topics concerning the integrability of almost Hermitian manifolds and also on various variational problems for the Koda functional which is regarded as an extension of the Einstein-Hilbert functional to almost Hermitian setting. Further, we obtained some results on the unit tangent sphere bundles such that the characteristic vector fields are harmonic vector fields. We also discussed some problems arisen in the course of our research activity and could obtain unexpected results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：概エルミート多様体、ゴールドバーグの予想、チャーン・ヴェイユ理論、ガウス・ボンネ・チャーンの定理、アインシュタイン・ヒルベルト汎関数、単位接球面束、普遍曲率恒等式、ボッホナー曲率テンソル

1. 研究開始当初の背景

概エルミート多様体の構造に関する研究において、概複素構造と概エルミート計量との関係について、例えば各種曲率条件を満たす概エルミート多様体の構造及び関連した話題については、現在でも国内外の多くの研究者によって研究されている。概エルミート多様体はその概複素構造が積分可能であるとき、積分可能であるといわれる。例えば、概エルミート多様体の積分可能性と曲率との関係に関しては、概ケーラー多様体の積分可能性に関する「ゴールドバーグの予想」(コンパクト、アインシュタイン概ケーラー多様体は積分可能である(従ってケーラー多様体となる))。がよく知られており、本予想に関しては、スカラー曲率が非負の場合は正しいことが示されているが、負の場合は未だに未解決のままである。ただ、非コンパクトな場合や不定値計量の場合には、反例に相当するものが知られている。トリチェリ・バンヘッケはケーラー多様体におけるボッホナー曲率テンソルの概エルミート多様体への一般化(これをTV-ボッホナー曲率テンソルと呼ぶ)を定義している。TV-ボッホナー平坦なNearly ケーラー多様体の局所分類が得られていた。リーマン多様体の接束は概ケーラー多様体となり、その超曲面である単位接球面束は接触計量多様体となる。接触計量多様体としての単位接球面束に関する研究は現在においても、多くの研究者によって活発に研究されている。

2. 研究の目的

本研究の主たる目的は、概エルミート多様体の幾何学的構造及び関連した話題について、主として下記の項目について考察することである。

- (1) 概エルミート構造の概複素構造に関する性質(積分可能性等)と概エルミート計量、特にその曲率との関係。
 - (2) 概エルミート構造に関する種々の変分問題とその応用。
 - (3) (1)と(2)に関連した話題及び本研究課題の研究過程において提起された問題。
- (1)における具体的話題としては、①ゴールドバーグの予想及び概エルミート多様体の積分可能性に関するその他の問題及び②TV ボッホナー平坦な概エルミート多様体の局所構造の分類。(1)の話題 ① に関しては、まず4次元の場合における予想の解決を目指す。(1)の話題 ② に関しては、TV ボッホナー平坦な概エルミート多様体で共形平坦でなく局所共形ボッホナー平坦ケーラー多様体でもないものが存在するか否かについて考察する。(2)における具体的話題としては、研究項目(1)の 話題① を視野に入れて、古田

汎関数の臨界点によるケーラー構造の特徴付け等について考察する。(3)における具体的話題としては ①リーマン多様体の接球面束上の標準的接触計量構造に関する問題及び ② 研究過程において提起された問題。(3)の話題① に関しては、その標準的接触計量構造における特性ベクトル場が調和ベクトル場である(すなわち、標準的接触計量構造に関してH-接触計量多様体となる)単位接球面束の底リーマン多様体の分類を目指す。(3)の話題② に関しては、本研究課題の研究過程で提起された問題で、概エルミート幾何学の枠組みにこだわらずリーマン幾何学において重要と思われる話題についても考察の対象とする。

3. 研究の方法

本研究課題に関するこれまでの研究成果及び研究経過さらに関連分野の研究の動向について、関係論文や図書等の文献の収集・検討を中心に、本研究の関連分野の専門家との研究連絡・研究打ち合わせ等を行いながら研究を進めてゆくという数学の研究における標準的な方法で研究を遂行してきた。このため、国内外の各種研究集会等へも参加をし、関連分野における多くの研究者との研究交流及び情報交換を行った。特に、研究協力者朴教授(韓国)との研究討論を頻繁に行なった。

4. 研究成果

本研究においては、上記研究目的に沿って研究を行ってきた。得られた研究成果及び研究経過はおおよそ以下の通りである。

研究項目(1)の話題①について。ゴールドバーグの予想そのものの解決には至らなかったが、研究項目(2)の研究過程で得られた4次元概エルミート多様体上の(概複素構造と曲率テンソル及びそれらの共変微分を含む)いくつかの恒等式が得られており、これらの恒等式を活用することが4次元の場合の本予想の解決に有効ではないかと期待している。その他、概エルミート多様体の積分可能性に関連したキャラビの問題「可符号閉曲面と4次元球面との直積多様体上に複素構造が存在するか?」に対して、部分解を得た。すなわち、標準的なリーマン計量をもった2次元球面と4次元球面とのリーマン積多様体上にはその直積リーマン計量に関して線形等長的な概複素構造は積分可能にはなり得ないことを示した。

研究項目(1)の話題②について。4次元TV ボッホナー平坦でグレイの曲率条件(G3)を満たすスカラー曲率が一定の概ケーラー多様

体は共形平坦または2次元局所複素空間型であることを示した。さらに、この結果に関しては、グレイの曲率条件 (G3) は本質的であることを実例を挙げて示している。

研究項目(2)について。与えられたコンパクト概エルミート多様体上のすべての概エルミート構造からなる空間及びその概エルミート計量に関する全体積がある一定値に等しいような概エルミート構造すべてからなる部分空間上でそれぞれ古田汎関数の第一変分を考え、対応するオイラー・ラグランジュ方程式を導き、アインシュタイン・ヒルベルト汎関数の臨界点としてのアインシュタイン計量の特徴づけに対する概エルミート版やケーラー構造の古田汎関数の臨界点としての特徴づけに関連したいくつかの結果を得ている。

研究項目(3)の話題 ① について。アインシュタイン多様体の単位接球面束がその標準的接触計量構造に関して H-接触計量多様体であるための必要かつ十分な条件は底アインシュタイン多様体が2-スタインとなることであることを示した。この結果をもとにして、カルバルソ・ペルローネの問題に対し否定的な解答を与えた。また、4次元リーマン多様体の単位接球面束がその標準的接触計量構造に関して H-接触計量多様体であるための必要かつ十分な条件は底リーマン多様体がアインシュタインとなることであることを示した。

研究項目(3)の話題 ②について。オイラー標数は位相不変量の一つで、偶数次元のコンパクト可符号リーマン多様体のオイラー標数はガウス・ボンネ・チャーンの積分公式によって与えられることはよく知られているkとである。ガウス・ボンネ・チャーンの積分公式をリーマン計量全体の空間上の一つの汎関数に関する恒等式とみなし、対応するオイラー・ラグランジュ方程式を導くことによって一つの曲率恒等式がえられる。この恒等式はコンパクトの仮定なしに同じ次元のすべてのリーマン多様体上で成り立つことがクズミナやラビによって示されているが、その別証明を与え、さらにその普遍性を示した。この結果は、「擬リーマン多様体」さらに「境界付き擬リーマン多様体」に関するものまで一般化されている。尚、上記研究項目(1)の話題①で触れた4次元概エルミート多様体上のいくつかの恒等式は、チャーン・ヴェイユ理論に基づき、ノビコフの定理やウの定理を用いることにより同様の方法によって導かれたものである。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計14件)

- ① Y.Euh, P.Gilkey, J.H.Park, K.Sekigawa:
Transplanting geometrical structures,
Diff.Geom.Appl. 31(2013),374--387. 査読有
DOI:10.1016/j.diffeo.2013.03.006
- ② J.C.Lee, J.H.Park, K.Sekigawa :
Some critical almost Hermitian structures,
Results. Math. 63(2013), 31--45. 査読有
DOI:10.1007/S00025-011-0143-8
- ③ Y.Euh, J.H.Park, K.Sekigawa :
A curvature identity on a 4-dimensional
Riemannian manifold, Results. Math.
63(2013),107--114. 査読有
DOI:10.1007/S00025-011-0164-3
- ④ Y.Euh, K.Sekigawa :
Orthogonal almost complex structures on
The Riemannian products of
even-dimensional round spheres, J.Korean
Math.Soc. 50(2013), 231--240. 査読有
DOI:10.4134/JKMS.2013.50.2.231
- ⑤ P.Gilkey, J.H.Park, K.Sekigawa :
Universal curvature identities, J.Geom.
Phys. 62(2012), 814--825. 査読有
DOI:10.1016/j.geomphys.2012.01.002
- ⑥ J.C.Lee, J.H.Park, K.Sekigawa :
Hermitian structures on the product of
Sasakian manifolds, Geometriae Dedicata,
161(2012), 399--408. 査読有
DOI:10.1007/s10711-012-9711-7
- ⑦ J.E.Jin, J.H.Park, K.Sekigawa :
Notes on some classes of 3-dimensional
Contact metric manifolds, Balkan J. Geom.
Appl. 17(2012), 54--65. 査読有
- ⑧ P.Kilkey, J.H.Park, K.Sekigawa :
Universal curvature identities, Diff. Geom.
Appl. 29(2011),770--778. 査読有
DOI:10.1016/j.difgeo.2011.08.005
- ⑨ Y.Euh, J.H.Park, K.Sekigawa :
Critical metrics for quadratic functionals
In the curvature on 4-dimensional
Manifolds, Diff. Geom. Appl. 29(2011),
642--646 査読有
DOI:10.1016/j.difgeo.2011.07.001

⑩ S.H.Chun, J.H.Park, K.Sekigawa :
H-contact unit tangent sphere bundles
of four-dimensional Riemannian
manifolds, J. Aust. Math. Soc. 91(2011),
243--256. 査読有
DOI:10.1017/S1446788711001388

⑪ Y.Euh, J.C.Lee, J.H.Park, K.Sekigawa,
A.Yamada : Almost Hermitian surfaces
With vanishing Tricerri-Vanhecke
Bochner curvature tensor, Colloq.Math.
122(2011), 33--53. 査読有
DOI:10.4064/cm122-1-4

⑫ Y.Euh, K.Sekigawa :
Nootes on strictly nearly Kaehler
Einstein manifolds, Compt. Rend. de
Acad. Sci. 64(2011), 791--798.
査読有

⑬ S.H.Chun, J.H.Park, K.Sekigawa :
H-contact unit tangent sphere bundles
of Einstein manifolds, Q. J. Math.
62(2011), 59--69. 査読有
DOI:10.1093/qmath/hap025

⑭ J.C.Lee, J.H.Park, K.Sekigawa :
Notes on critical almost Hermitian
Structures, Bull. Korean Math. Soc.
47(2010), 167--178. 査読有
DOI:10.4134/BKMS,2010.47.1.167

[学会発表] (計5件)

① 関川浩永 : 4次元リーマン多様体の普遍
曲率恒等式、第6回数物研究会、富山県民会
館、2012年9月13日

② 関川浩永 : A curvature identity on
a 4-dimensional Riemannian manifold and
its applications, Conference in Geometry
and Global Analysis, サンティアゴ・デ・コ
ンポステラ (スペイン)、2010年12月
13日

③ 関川浩永 : 臨界概エルミート構造につい
て、放送大学秋田学習センター、2010年
11月18日

④ 関川浩永 : Some critical almost
Hermitian structures and examples,
International workshop on complex
structures, integrability and vector
fields, ソフィア (ブルガリア)、2010
年9月15日

⑤ 関川浩永 : A curvature identity on a
4-dimensional Riemannian manifold,

International Workshop on Differential
Geometry, 成均館大学校 (韓国)、2010
年6月25日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関川 浩永 (SEKIGAWA KOUEI)
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号 : 60018661

(2) 研究分担者

小黒 隆 (OGURO TAKASHI)
東京電機大学・理工学部・講師
研究者番号 : 40297578

山田 章 (YAMADA AKIRA)
長岡工業高等専門学校・一般教育科・准教
授
研究者番号 : 60311007

