様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月１３日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００７３
研究課題名（和文）　有理ホモロジー球面の摂動的不変量の解析的、幾何学的性質の研究

研究課題名（英文）Study of perturbative quantum invariant of rational homology 3-spheres

研究代表者
高田　敏恵（TAKATA TOSHIE）
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：40253398

研究成果の概要（和文）：有理ホモロジー球面 M の SU(N) free energy は、２変数のべき級数である M の不変量である。SU(N)摂動的不変量は、LMO 不変量に、SU(N) weight system を適用することによってえられる。SU(N) weight system の組み合わせ的計算法を利用することによって、ザイフェルトホモロジー球面に対するすべての種数についての SU(N) free energy の公式を得た。それらは、generalized Catalan numbers で表される。特に、種数０に対する free energy(planar limit)については、種数０に対する generalized Catalan number（変数が偶数）でかけるが、その明確な公式を得た。

研究成果の概要（英文）：For a rational homology 3-sphre, the SU(N) free energy is a power series in 2 variables and an topological invariant of M. The SU(N) free energy can be obtained by applying the SU(N) weight system to the LMO invariant of M. By using a combinatorial way to compute the SU(N) weight system, we obtained an formula for any genus of the SU(N) free energy for Seifert homology 3-spheres. It can be written in terms of the generalized Catalan numbers. Especially, the genus 0 part of the free energy can be written in terms of the generalized Catalan numbers for genus 0 where parameters are even numbers. We gave a formula of these generalized Catalan numbers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１２年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系分野
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：低次元トポロジー、量子不変量

１．研究開始当初の背景

半単純リー環に付随した閉３次元多様体の量子不変量が構成され、大槻、Le によって、量子不変量の数論的漸近展開により、摂動的不変量が構成された。

有理ホモロジー球面は３次元球面と同じ有理係数ホモロジー群をもつ閉３次元多様体である。

有理ホモロジー球面 M の半単純リー環に付随する摂動的不変量は、パラメータ h に関する有理係数のべき級数による表示をもつ。

また、Le、村上順、大槻によって量子不変量を統一する 閉３次元多様体の LMO 不変量が定義された。有理ホモロジー球面 M の LMO 不変量は、Jacobi 図とよばれる 3 価グラフによって有理数体上張られる空間に値をもつ。有理ホモロジー球面の半単純リー環に付随した摂動的不変量は、LMO 不変量に半単純リー環に付随した重み系(weight system)とよばれる Jacobi 図の空間から有理数の集合への写像を適用することによって得られることが知られている。

G を単連結コンパクトリー群 SU(N), SO(N), Sp(N) のいずれかとする。

上記リー群に付随した重み系を適用された LMO 不変量を M の G free energy という。連結な次数 d の Jacobi 図 D に対して、W(D)は次数 d+2 の N の整数係数多項式となる。従って、G free energy は、N の多項式を係数とする h のべき級数である。 t=Nh と置き換えることにより、３次元多様体 M の G free energy は t と h の２変数べき級数となる。h の g（種数に対応）べきの係数は t のべき級数である。

この M の G free energy は、数理物理における M 上の自明な G 束の自明な接続のまわりでのチャーンサイモンズ経路積分の摂動展開の Large N limit に対応している。

有理ホモロジー球面の G free energy の解析的性質は、摂動的不変量のとる値に強い制限が入ることを示唆することになり、３次元多様体の分類問題からも重要である。

S. Garoufalidis, T.T.Q. Le, M. Marino らは、G=SU(N)のとき、任意の３次元多様体 M に対して、G free energy は、t=0 の(種数 g に依存しない)近傍で解析的であることを示し、レンズ空間の SU(N) free energy の明確な公式を与えた。

S. Garoufalidis と M. Marino は、G=SO(N), Sp(N)のとき、G　free energy も同様の解析的性質をもつことを予想した。

代表者は、前研究課題の研究において、 レンズ空間の SO(N), Sp(N) free energy の明確な公式を与え、レンズ空間に対して、S. Garoufalidis と M. Marino の上記予想が正しいことを示した。

２．研究の目的

① 単純コンパクトリー群に付随した３次元多様体の摂動的不変量が定義されたが、一般の３次元多様体の摂動的不変量を具体的に計算することは難しく、その性質には、未知の部分が多い。本研究の目的は、リー群が、SU(N), SO(N), Sp(N)のとき、有理ホモロジー球面の摂動的量子不変量の N に関する展開である３次元多様体の自由エネルギー (free energy)に注目し、その解析的な性質、またその展開にあらわれる級数の他の不変量との関係、幾何学的意味などを解明することである。

② あるクラスの３次元多様体の sl(2)に付随した摂動的不変量は、保型関数との関連が知られているが、他のリー環に対して、摂動的不変量と保型関数との関係はわかっていない。そこで、摂動的不変量との同値性が知られている G free energy の立場から、摂動的不変量と保型関数との関係を調べる。

③ ３次元多様体の G free energy に対応する、結び目に対する概念がある。それは、sl(2)の N 次元既約表現を指定された結び目 K の N colored Jones polynomial のループ展開である。それは、q=exp(h), t=Nh とおくことにより、t と h のべき級数の表示をもつ。h のそれぞれのべきの係数は t のべき級数であり、分母が結び目のアレクサンダー多項式にょってかけることが知られている。そこで、３次元多様体の G free energy についても、アレクサンダー多項式の役割を果たす多項式があるのか調べる。また、そのような多項式がある場合、その幾何学的意味づけ、他の計算手法など研究する。

④ 更に、G free energy は、ゲージ理論など物理とも密接に関連している。物理における理論が、数学で得られた結果の幾何学的解釈の手がかりとなることも多い。最近得られた、レンズ空間の G free energy の公式も、ゲージ理論において現れる式との類似点がみられる。物理における結果にも留意し、摂動的不変量の性質の解明に努める。

３．研究の方法

① G free energy の具体的な有理ホモロジー球面の公式を求めるための方法の一つは以下である。 S. Garoufalidis, T.T.Q. Le, M. Marino らは、レンズ空間に対する G free energy の 明確な公式を求めるため、Bar-Natan と Laurence によって与えられたレンズ空間の LMO 不変量の公式を利用した。 とくに、自明な結び目の kontsevich 不変量 (wheel と呼ばれる １つのループに偶数本の辺が ついている open Jacobi 図の無限和) に半単純リー環に付随した weight system W を適用した値の計算、それによってレンズ空間に対する G free energy が具体的に

計算できることが明確な公式をもとめる際の鍵となる。Bar-Natan と Laurence はさらに、ザイフェルトホモロジー球面のLMO 不変量の公式が与えた。それは、自明な結び目の kontsevich 不変量をもちいてあらわされているが、いくつかの自明な結び目の kontsevich 不変量の積の形が含まれおり、それが計算を難しくしている。いくつかの wheel の積に半単純リー環に付随する weight system を彼らの公式に適用して、ザイフェルトホモロジー球面に対する SU(N) free energy の公式を求める。

② G free energy の具体的な有理ホモロジー球面の公式を求めるためのもう一つの方法は、G free energy との同値性がしられている摂動的不変量の公式を使うことである。代表者の以前の研究においてえられたザイフェルト多様体の量子不変量の公式、LMO 不変量の次数が低い部分の公式なども利用することによって、G free energy を通して、摂動的不変量の解析的、幾何学的性質を調べる。

③ G free energy に現れる級数の性質を調べるため、結び目のKontsevich 不変量、colored Jones 多項式のループ展開がえられる仕組み をよりよく理解し、G free energy における Alexander 多項式に対応するものが あるのか吟味する。その際、大槻氏や他の研究者によってえられている あるクラスの結び目の 2-ループ多項式の公式と、それらの結び目の手術によってえられる３次元多様体の G free energy において 対応する g=1 の部分との 比較研究を行う。

④ 更に、摂動的不変量は、数理物理における matrix integral としてかけることが Garoufalidis、Marino らによって証明されているので、matrix integral から、摂動的不変量を研究することにより、その解析的性質を調べる。 Large N limit についての物理における結果、それに関連する研究についても、よりよく理解するよう努め、G free energy の性質解明の手がかりとする。

４．研究成果

① Bar-Natan と Laurence が与えた、ザイフェルトホモロジー球面の LMO 不変量は自明 な 結 び 目 の kontsevich 不 変 量 (wheel と呼ばれる １つのループに偶数本の辺が ついている open Jacobi 図の無限和）をもちいてあらわされ、wheel に SU(N)に付随する weight system を適用することによって摂動的不変量がえられる。よって wheel の積に半単純リー環に付随する weight system を適用した値の計算が、ザイフェルトホモロジー球面に対する明確な free energy の公式を求める鍵となる。wheel の積の個数が少ない場合、具体的な計算を実行し、いくつかの明確な公式を得た。また、それらの計算のしくみを検証することにより、その組み合わせ的計算法は数 理 物 理 に あ ら わ れ る generalized Catalan number と関連していることがわかった。具体的には、それは、n-valent の１つの頂点と n 個の 1-valent の頂点をもついくつかのグラフから閉曲面上の連結なグ ラ フ を 作 る 方 法 の 数 （ generalized Catalan number とよばれる）と同じ漸化式を満たすことがわかり、したがって、ザイフェルトホモロジー球面に対して、すべ の 種 数 に 対 す る free energy は 、generalized Catalan number によってあらわされることがわかり、その公式を得た。

特に、種数０に対する SU(N) free energy (planar limit)については、種数０に対する generalized Catalan number（変数はすべて偶数）でかけるが、その明確な公式を得た。

② colored Jones 多項式のループ展開との類似の研究のため、結び目の絡み目の Dehn 手術によってえられる３次元多様体の摂動的不変量は、その絡み目の Kontsevich 不変量に Lie 環に付随した weight system を適用したものの Gauss 積分によって得られることに着目し、２成分トーラス絡み目 の Kontsevich 不 変 量 に SU(N) 、SO(N)weight system, vector 表現を適用したときの不変量の振る舞いについて考察し、予想されていた関係式を示した。

③ 具体的な有理ホモロジー球面について、その摂動的不変量を計算することは非常に難しい。その具体的な計算の手掛かりとするため、量子不変量とHenning不変量との関連に着目した。これは、ある条件をみたす、量子群の中心を求めることに帰着される。特に、数理物理においてlogarithmic conformal field theoryに関連して得られていた sl(2) に付随した量子群の中心の明確な公式を利用することにより、sl(2) に付随した量子不変量、Witten-Reshetikhin-Turaev不変量のsl(2) の中心を利用した代数的公式を得た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 高田敏恵、
On the SO(N) and Sp(N) free energy of a rational homology 3-sphere、
International Journal of Mathematics、
査読有、Vol.22 、2011、pp.465-482.

〔学会発表〕（計５件）

① 高田敏恵、
On the SO(N) and Sp(N) free energy of a rational homology 3-sphere、
量子群と量子トポロジー、
2010 年 4 月 20 日、京都大学数理解析研究所

② 高田敏恵、
A relation between the HOMFLY and Kauffman polynomials for 2-component torus links、
広島大学トポロジー・幾何セミナー、
2010 年 7 月 13 日、広島大学

③ 高田敏恵、
3 次元多様体の LMO 不変量と摂動的不変量について、
日本数学会 2010 年度秋季総合分科会トポロジー分科会特別講演、
2010 年 9 月 22 日、名古屋大学

④ 高田敏恵、
Ribbon Hopf algebras と３次元多様体の量子不変量、
結び目の量子不変量とそのカテゴリー化、
2011 年 8 月 24 日、早稲田大学

⑤ 高田敏恵、
An algebraic formula of the Witten-Reshetikihin-Turaev invariant for 3-manifolds、
The 8th East Asian School of Knots and Related Topics、
2012 年 1 月 9 日、KAIST（韓国）

６．研究組織

研究代表者
高田　敏恵（TAKATA TOSHIE）
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：40253398