3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ９ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６２９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４００７４
研究課題名（和文）写像の特異点理論の低次元トポロジー的研究

研究課題名（英文）Singularity theory of mappings from the viewpoint of low-dimensional topology

研究代表者
高瀬　将道（Takase, Masamichi）

成蹊大学・理工学部・准教授

研究者番号：３０４４７７１８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：微分可能写像の特異点理論を用いて微分トポロジーを研究することを目標にし、多岐にわたる題材を扱った。まず、多様体間のはめ込み（＝特異点を持たない写像）理論の幾何学的様相を、主に特異点理論を用いて研究し、２本の論文を海外の雑誌に公表した。また、折り目写像（＝最もマイルドな特異点のみを持つ微分可能写像）についても研究を行い、２本の論文を海外の雑誌に公表した。うち１本は代数トポロジーとの関係を念頭にした研究で、少し変わっている。さらに、古典的結び目図式の種数に関する研究を行い、１本の論文を海外の雑誌に公表したほか、曲面結び目についての共同研究を始めた。

研究成果の概要（英文）：I studied various topics related to singularities of differentiable mappings in order to have new knowledge on differential topology. First, I studied immersions (ie maps with no singularities) between smooth manifolds, using (mainly global aspects of) singularity theory, and published two journal articles. Next, I studied fold maps (smooth maps with only "the mildest" singularities called fold singularities), and published two journal articles. Moreover, I published another journal article on a certain transformation of diagrams of classical knots. I also began to study surface-knots in the last year of the program.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：多様体

１．研究開始当初の背景

低次元トポロジーおよび高次元トポロジー、微分トポロジーおよび代数的トポロジーという異なる領域の境界にある様々なトピックに注目することによって複数の分野を結つけようとする研究は充分に行われていないように思われた。また、研究が深化するほどに他分野との関連が見づらくなるという側面を持つ数学の研究において、このような研究はある程度のインパクトを持つと思われた。

研究代表者はこれまで主に低次元微分可能多様体から高次元微分可能多様体への滑らかな埋め込みやはめ込みの幾何的側面を研究してきた。埋め込みやはめ込みの理論の代数的側面はよく研究されてきており、満足なところまで来ていると認識されている反面、具体的な与えられた埋め込みやはめ込みの幾何的な性質をよく知りたいというときにはこのような代数的理論が力を発揮しない場面が多かったからである。加えて、このような「代数 vs 幾何」の構図は高次元トポロジーと低次元トポロジーの対応に類似する点が多いと考えたので、高次元と低次元のはざまにある次元対の埋め込みやはめ込みに注目することによって、高次元トポロジーと低次元トポロジーを結ぶ話題を見出す可能性があると思ったのである。

微分可能写像の特異点理論に関わる背景について少し付け加える。コボルディズム理論と写像の特異点理論は、トポロジーの礎を築いたR. Thom の二大遺産である。前者は大発展し、様々な分野で指導原理となっている。後者はモース理論やはめ込み理論をルーツとし、カタストロフ理論として興隆した歴史を持つが、特異点を体系的に理解するために必要な数学的道具に欠いていたため充分に発展したとは言い切れない。言い換えれば、今も多様に発展中のなおホットな分野である。特に、研究代表者の考えでは、今は写像の特異点理論を用いて多様体の大域的性質を捉える研究が待たれている。Kazarian、Szucs、Rymani、Feher らの研究によってある程度の道具が用意されたといえる状況だからである。この観点は、特異点理論をモース理論の一般化と捉えればごく自然である。また、特異点型を制限した写像を用いて多様体の微分可能構造を判別する、佐伯修氏(九州大学 IMI) の一連の研究成果から有望であることも明らかである。

２．研究の目的

微分可能写像の特異点理論を用いて、多様体のトポロジーを研究することを目的とした。とりわけ、高次元トポロジーと低次元トポロジー、微分トポロジーと代数的トポロジーの間を行き来することが必要となるような具体的問題の発掘と解決を目指した。

少々具体的に書けば、これまで行ってきた低次元微分可能多様体から高次元微分可能多様体への滑らかな埋め込みやはめ込みの幾何的側面の研究においても多少の役割を果たしてきた微分可能写像の特異点理論をこれまで以上に積極的に活用すること、および、現在低次元トポロジーの目玉となっている結び目理論に対して高次元トポロジーの手法をこれまで以上に積極的に持ち込むことを目的とした。

さらに具体的に書けば、「特異 Seifert 膜」を用いて（Hopf 不変量の絡みから特に興味深い 3 次元多様体と 7 次元多様体の）埋め込みやはめ込みを研究すること、写像の特異点理論とはめ込み理論を用いて古典的結び目や曲面結び目を研究することなどを主要な目的とした。

３．研究の方法

時期ごとにテーマを絞り、できるだけ具体的な問題にアタックした。幅広い分野の研究集会に参加し、多くの分野の研究者の講演や彼らとの交流から、問題解決の糸口を得る努力をした。得られた成果は英文の論文にまとめ、海外の雑誌に公表した。必要に応じて国内外の研究集会での講演によって公表した。

研究者との交流に関して言えば、自らが研究集会等に参加して数多くの研究者と交流を持つことに加えて、他研究機関に所属する特定の研究者を招聘し長時間の議論の機会を持つ努力も行った。場合によっては複数人の研究者を同時期に招聘し、議論の幅を広げる試みも行った。

また、自分の研究分野とは幾分離れた分野の研究者とも積極的に交流した。具体的な問題を見出すためには常に引き出しの数を増やす努力を怠らないことが必要であると考えたからである。いまだ結実が見られないことも多いが、それでも当該研究期間において、九州大学の佐伯修氏、信州大学の境圭一氏と大黒顕司氏、長野工業高等専門学校の平戸良弘氏、Uppsala 大学(スウェーデン)の Tobias Ekholm 氏との共同研究を行い、それぞれ学術論文を公表した。

実際に論文を執筆する際には、なるべく昼夜を問わず集中力をもって一気に書き上げることを目指した。共著論文を執筆する際には、学術的な点に関して（お互い）遠慮や妥協が生じないように努力した。E メールでの意見交換は難しい部分も多いので、やはり直接顔を見て議論する機会を多く持つように努力した。

完成した論文の投稿先を選ぶ際には、国内外を問わずできるだけよく出回る学術雑誌を選ぶであることに加え、できるだけ信頼できそうな編集者がいる学術雑誌を選ぶように心がけた。後者の観点については、投稿を受け付ける編集者が最初の重要な読者であると考えるからである。

４．研究成果

微分可能写像の特異点理論を用いて微分トポロジーを研究することを目標にし、多岐にわたる題材を扱った。まず、多様体間のはめ込み（＝特異点を持たない写像）理論の幾何学的様相を、主に特異点理論を用いて研究し、１本の共著論文と１本の単著論文を海外の雑誌に公表した。また、折り目写像（＝最もマイルドな特異点のみを持つ微分可能写像）についても研究を行い、２本の共著論文を海外の雑誌に公表した。うち１本は代数トポロジーとの関係を念頭にした研究で、少し変わっている。さらに、古典的結び目図式の種数に関する研究を行い、１本の共著論文を海外の雑誌に公表した。

また、公表論文としては結実していないが、結び目図式、long knots、曲面結び目、ローズマン変形、戸田括弧積など、これまで殆ど知らなかった題材の「勉強」を始められたことも大きな成果であると考えている。特に、曲面結び目に関する東京学芸大学の田中心氏との共同研究、および totally real 埋め込み、はめ込みやラグランジアン埋め込み、はめ込みと結び目の関係についてのまた別の共同研究が始まりつつあることは当初計画の範囲を超える非常に大きな成果であると言えるかもしれない。どちらも今後研究の幅を広げる端緒となる可能性が非常に高いからである。

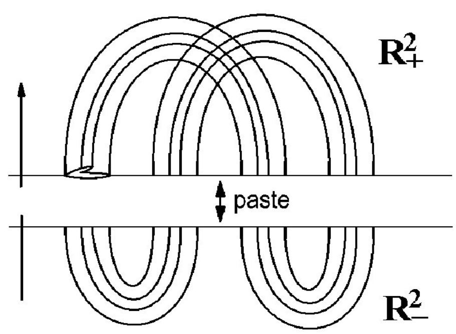
具体的な成果は以下の通りである。

2 次元球面から 4 次元空間への自己横断的なはめ込み f であって、n 個の横断的 2 重点を持つものを考える。f の法バンドルはオイラー類が 2n の 2 次元円盤ベンドルであるから、その同伴束はオイラー類が 2n のサークルバンドルである。すなわち、レンズ空間 L(2n, 1)から 4 次元空間へのはめ込みが得られることになる。このはめ込みにさらに 3 次元球面からの普遍 2n 重被覆を合成すると、3 次元球面から 4 次元空間へのはめ込み F が得られる。このはめ込み F が表す正則ホモトピー類とボルディズム類を n の式として表現することに成功した。実際には、与えられたはめ込みを拡張する安定写像を具体的に構成し、そこに現れる臍型特異点の個数を数えることを行っている。この安定写像を構成する際には複素数を使って簡潔に表される写像を具体的に摂動することを行っているなど、全体にわたって「手作り感」が強いマニアックな研究である。この結果を Tobias Ekholm 氏(スウェーデン)との共同研究としてまとめた論文が Bulletin of the London Mathematical Society 43 (2011)に掲載された。

n 次元多様体から n 次元空間への折り目写像のボルディズム群は球面の n 次安定ホモトピー群に同型である。安定ホモトピー群に定義される合成および戸田括弧積に対応する、折り目写像の操作を幾何的に定義した。これにいくつかの考察を加え、長野工業高等専門学校の平戸良弘氏との共著論文としてまとめた。n 次元多様体から n 次元空間への折り目写像に対して戸田括弧積という「三重積」を定義していると見なすこともできる。例えば、下の図は球面の 2 次の安定ホモトピー群における有名な関係式

$$\langle 2\iota, \eta, 2\iota \rangle = \eta \circ \eta$$

を表す折り目写像の絵である。類似の研究はほとんど行われていないと思われる独特の研究である。この共著論文は Fundamenta Mathematicae 216 (2012)に掲載された。



有向 7 次元多様体から 8 次元空間へのはめ込みのボルディズム類を、そのはめ込みを有向コンパクト 8 次元多様体からのジェネリック写像に拡張する際に現れる特異点の情報から読み取る公式を与えた。これを論文にまとめたものが、Mathematische Zeitschrift 272 (2012)に掲載された。以前に有向 3 次元多様体から 4 次元空間へのはめ込みに類似の研究を行っていたが、今回の論文の場合はより複雑な型の特異点を扱う必要があり、そのために以前の研究の一般化としては部分的なものになっている。ただし今回の論文には、より意識的に Thom 多項式の相対版を定式化する試みが含まれている。

古典的結び目の図式に対して、その種数を減らすある変形を定義し、考察した。主要なアイディアは Turaev が近年導入した knotoid から来ている。ただし、主定理の証明には仮想結び目を用いた議論が必要とする。研究のための一般化に見られがちな仮想結び目の研究が、実際に本物の結び目の研究に役立てられている例は多くないと思われるので、この部分は興味深い。ある具体的な結び目の図式の種数を決定する際には、計算機による実験がヒントになっており、これは研究代表者の研究履歴においてターニングポイントとなりうる重要な点である。また、これまでも「広い意味での結び目」を写像の特異点理論を用いて研究してきたものの、ここで「本物の」結び目理論が登場しているという点も、個人的な研究履歴においては大きな意味を持つかもしれない。この成果は信州大学の大黒顕司氏と境圭一氏との共著論文としてまとめられ、著名な学術雑誌である Indiana University Mathematics Journal 61 (2012)に掲載された。

スペシャルジェネリック写像のはめ込み・埋め込みへの持ち上げについて、九州大学の佐伯修氏との共同研究を行った。内容を一言で言えば、「局所的に単純な特異点を持つ写像の特異点の大域的な解消」についての研究である。特に平面へのスペシャルジェネリック写像のはめ込み・埋め込みへの持ち上げについては包括的な結果を得た。これまでとは逆に、特異点の研究に埋め込みとはめ込みの理論が利用されている点も、個人的な研究の発展の意味では大きな成果である。主定理の証明には、エキゾチック球面の群、球面の(微分) 同相写像の空間や long knots の空間の高次ホモトピー群、Schottky 群の作用など、多岐にわたる領域の知識が動員されている。微分トポロジーのフレイバーが満載の研究である。単純な問題設定であるから今後の発展も期待できる。この結果をまとめた共著論文が Journal of Gokova Geometry Topology 7 (2013)に掲載された。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Masamichi Takase, Osamu Saeki:
Desingularizing special generic maps (with Osamu Saeki),
Journal of Gökova Geometry Topology 7 (2013) 1-24.

② Kenji Daikoku, Keiichi Sakai, Masamichi Takase:
On a move reducing the genus of a knot diagram,
Indiana University Mathematics Journal 61 (2012) 1111-1127.

③ Masamichi Takase:
Oriented bordism of codimension one immersions of 7-manifolds and relative Thom polynomials,
Mathematische Zeitschrift 272 (2012) 101-108.

④ Yoshihiro Hirato, Masamichi Takase:
Compositions of equi-dimensional fold maps,
Fundamenta Mathematicae 216 (2012) 119-128.

⑤ Tobias Ekholm, Masamichi Takase:
Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions,
Bulletin of the London Mathematical Society 43 (2011) 251-266.

〔学会発表〕（計３件）

① Desingularizing special generic maps, トポロジー火曜セミナー，東京大学大学院数理科学研究科，2013 年 10 月 15 日 16:30～18:00.

② スペシャルジェネリック写像のはめ込みへの持ち上げについて，特異点論と幾何構造，長野市生涯学習センター，2012 年 5 月 31 日 14:40～15:30.

③ はめ込みのコボルディズム群と特異ザイフェルト膜について，トポロジー金曜セミナー，九州大学数理学研究院，2010 年 7 月 16 日 16:00～17:00.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
高瀬　将道　(TAKASE, Masamichi)
成蹊大学・理工学部・准教授
研究者番号：30447718

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：