様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ４ 月 １０ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４００７６

研究課題名（和文）実閉体上の幾何と多変数関数論

研究課題名（英文）Geometry on real closed fields and sevaral complex variable functions

研究代表者
塩田　昌弘（Shiota, Masahiro）

名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：００００２７３８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円、（間接経費）　　990,000円

研究成果の概要（和文）：　フランスのレンヌ大学のFichouと共同研究を行い、2つの問題を解決した。1つは、解析的関数の芽の分類に関するある特異点理論の未解決問題。2つめは、 Milnor fiberに関する問題。1つの論文を発表し、1つの結果を書いている。
またイギリスのマンチェスター大学Tressleと共同研究をし、1つの問題を解決した。問題はArtinの近似定理の位相的証明で、良く知られた予想問題である。その結果は今書いている。
そのほか、兵庫教育大学の小池敏司氏と埼玉大学の福井敏純氏と特異点理論の共同研究をして、1つの論文を発表し、1つの結果を書いている。

研究成果の概要（英文）：I worked with Fichou of University of Rennes on two problems. One problem is an open problem of singularity theory on classifications of analytic function germs, and the other is about Milnor fibers. The first was already published in a journal, and we are writing the second.
I worked with Tressl of Manchester Universuty. We solved a well known problem on a topological version of Artin approximation theorem. We are now writing it.
I also worked with Koike of Hyogo University of education and Fukui of Saitama University. We solved two problems on real singularity theory. One was published, and the other will be written.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学幾何学

キーワード：位相幾何　計算可能性

１．研究開始当初の背景

この研究の背景にある分野は実代数幾何と数学基礎論のモデル理論の順序極小構造理論である。

（1）（実代数幾何の背景）実数体を別の実閉体に置き替えて実数上の問題を解決したのは E.Artin が最初である。彼は非負な R^n 上の多項式関数は有理関数の二乗の和の形になるという Hilbert の第１７問題を、R を有理関数体の実閉包体に置き換えて解いた。
その後、長くこの証明方法は忘れられていた。そして、1980 年代から Brumfiel, Coste, Roy 等によって、この証明方法が使われ、実代数幾何の研究がはじまった。彼らは、実数上で代数幾何を考えた時の色々な病的な現象（例えば、Hilbert の零点定理が成り立たない、代数的集合の多項式写像による像また代数的集合の連結成分が代数的に必ずしもならない、等）を解決した。その後、同じ方法で多くの結果が得られた。例えば、Ruiz は Hilbert の１７問題を実解析的関数の場合に証明した。また、代表者は Bolte 等とで特異点理論と応用数学でよく使われる Lojasiewicz の二つ目の不等式を大域的に証明した。これらの研究から、体を変換するのが重要である、と我々は認識した。

（2）（モデル理論の順序極小構造理論の背景）体に関するある問題を考えるとする。そのとき、モデル理論では体を固定せずにどんな体でも通用する証明をする。すなわち、体の公理からアルゴリズムで導かれるものだけを求める。普通の方法ではあまりに複雑で困難な問題の証明を可能にすることがある。最も有名なのは Hrushovski による代数幾何の Mordell-Lang 予想の解決である。また、代表者は連携研究者の村山光孝氏とこの方法で次の結果を得た。G を Lie 群とし、M を proper な G-多様体とする。すると、M と M/G を同相写像で多面体に移し、M から M/G への標準写像を PL 写像になるようにできる。すなわち、標準写像の PL 化ができる。この問題は未解決の予想問題として G-多様体の専門家の村山氏から共同研究をもちかけられてきたものである。代表者は G-多様体の理論が下記の順序極小構造理論に当てはまることに気がつき、当てはめ解決した。実代数幾何が刺激となって、1980 年代終わりから、Pillay 等によって順序上の順序極小構造の理論が始まった。R を順序体とする。R には順序で位相が入る。公理として、扱う R の部分集合は有限個の点と区間の和集合のみ、というのを考える。この公理と（空かもしれない）任意の公理からアルゴリズムで導かれる R^n の部分集合のあつまりを順序極小構造と呼ぶ。一番代表的なのは実代数幾何の準代数構造で、多項式関数の等号と不等号で書き表される集合のあつまりである。
さて、モデル理論の一つの大きな問題は、普通の数学の理論を自然な最小個の公理とアルゴリズムで構成し直すことである。それができる理論は計算可能と（または、定義可能と）呼ばれている。順序極小構造理論でも計算可能かどうかが大きな問題である。実代数幾何は計算可能だと信じられ、多くの個々の結果が示されている。代表者もこの研究をして、1997 年に Birkhauser から Geometry of subanalytic and semialgebraic sets という題で本を出版した。その中で、Thom の関与した特異点理論の結果はすべて計算可能であることを示した。また、そこでの議論は順序極小構造で行った。これに関連した研究を、連携研究者の小池敏司氏と、あるいは、Fichou と行っている。なお、代数幾何の結果のほとんどは計算可能なのは知られている（ 落合 啓之, 西山 享, 山本 敦子, 示野 信一, 室 政和訳、グレブナ基底と代数多様体入門 イデアル・多様体・アルゴリズム,シュプリンガージャパン, 2000)。

２．研究の目的

研究期間内に次の 3 つの研究を行う予定であった。

（1）特異点理論。特異点理論の知られた結果を、すべて調べて、それが計算可能かどうかを考えるのは、対象が余りにも広い。当然、計算可能性が意味のある、そしてそれ自身重要な結果にしぼって研究をしなければいけない。それを探すのが、1つの研究であった。既に重要性が分かっていたのは、ラグランジュールジャンドル特異点理論であった。この特異点理論の出発点は Darboux の定理であると思った。この定理を積分なしで証明する予定であった。

（2）微分位相幾何。h-同境理論のように、微分位相幾何の分野で、よく知られた重要な結果の 1 つ 1 つが一般化可能かどうか調べる。いわば一般の実閉体でアルゴリズムだけで到達できる微分位相幾何の地図を書くのが目的であった。ここではすべての重要な微分機かの結果が研究対象であった。

（3）多変数関数論。多変数関数論の大域的性質の中で最も基本的で重要なのは次の 2 つの予想であった。C を標数 0 の代数的閉体とし K を C^n の有界閉集合とする。すると K の近傍で定義された正則関数の K での芽のなす環はネーター環か。Cartan の Stein 多様体に関する定理 A,B の一般化は成り立つか。これらを解決する予定であった。

３．研究の方法

（1）特異点理論。特異点理論の専門家、埼玉大学の福井敏純、兵庫教育大学の小池敏司、レンヌ大学の Fichou とはお互いの大学を行き来し、彼らの協力を得て、特異点理論の知られた重要な結果を、できるだけ調べる。また、カナダのマクマスター大学の Marikova を名古屋大学に招聘して、イギリスのマンチェスター大学の Tressl とは、お互いの大学を行き来してモデル理論と特異理論との関係について共同研究を行う。

（2）微分位相幾何。微分位相幾何に関しても上記の人たちと共同研究をする。それ以外にも、レンヌ大学の Coste とも、お互いの大学を行き来して共同研究をする。彼とは既に、この分野で共同研究をして多くの成果を得ている。未解決の共同研究の問題が多数あり、同じように共同研究をする。
（3）多変数関数論。マンチェスター大学の Jones と彼の大学を訪問して、共同研究をする。彼はモデル理論の専門家で、研究目的で述べた多変数関数論に関する問題に興味を思っている。

４．研究成果
（1）特異点理論。上記の人たちの協力で 2 つの研究成果を得た。
① 論文③で発表してあるが、もともと小池敏司等が行っていた、写像の特異性の研究が、一般化可能であることを証明した。そのため必要となった、順序極小構造理論で定義可能な集合の測度に関する問題を Marikova と考えた。今まで研究されてきた測度は、測度の公理を満たすことを前提としたもので、そのため応用出来なかった。そこで我々は公理を減らし、その代わりここで使える結果を探し成果を得た。これは雑誌に投稿中である。
② Fichou と Milnor fiber の分類に関する問題を解いた。Milnor fiber を Puiseux 級数で見て、どうなるかを調べた。他分野にわたる研究で、新しい観点である。これは今論文に執筆中である。
（2）微分位相幾何。Coste と Tressl とで Kollar の予想問題を解いた。これは Artin の近似定理の位相バージョンで、またモデル理論の 1 つの予想問題を解決するのに必要とされるものである。手法は特異点理論、微分位相幾何、実代数幾何とモデル理論にわたるもので、互いの専門を生かして共同研究を行った。とくに論文②の結果とその証明方法が役立った。これも今論文に執筆中である。
（3）多変数関数論。Jones と Passau 大学の Kaiser と共同研究をして、Cartan の定理 A,B の一般化が問題の中心だと認識した。これを大域的準解析的解析関数の構造という特殊だが代表的な場合で解決しようとした。そして部分的に成果を得たので論文を執筆中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① 塩田昌弘、村山充孝, Triangulation of the map of a G-manifold to its orbit, Nagoya Math. J., 査読あり, 212 巻, 2013, 159-195
② 塩田昌弘、O-minimal Hauptvermutung for polyhedra I, Invent. Math., 査読あり, 196 巻, 2014, 163–232
③ 塩田昌弘、L. Paunescu, 小池敏司, TaLe Loi, Directional properties of the sets definable in o-minimal structure, Annales de l'Institute Fourier, 査読あり, 63 巻, 2013, 2017-2047
④ 塩田昌弘、Goulwen Fichou, Virtual Poincare polynomial of the link of a real algebraic variety, Math. Zeitschrift, 査読あり, 273 巻, 2013, 1053-1061
⑤ 塩田昌弘、Goulwen Fichou, Analytic equivalence of normal crossing functions on a real analytic manifold, Proceedings of London Math. Soc, 査読あり, 104 巻, 2012, 1121-1170
⑥ 塩田昌弘、Goulwen Fichou, On almost Blow-analytic equivalence, Proceedings of London Math. Soc., 査読あり, 103 巻, 2011, 676-709
⑦ 塩田昌弘、Analytic and Nash equivalence of Nash maps, Bull. London Math. Soc., 査読あり, 42 巻, 2010, 1055-1064

〔学会発表〕（計 4 件）

① 塩田昌弘 An application to G-manifold problem, Workshop Applications of 0-minimality to analysis and number theory, 2013 年 9 月 9 日, ドイツ, パッサウ大学
② 塩田昌弘, Semialgebraic singularity theory, Geometry and topology of singularity spaces, 2012 年 10 月 1 日, フランス, マルセイユ
③ 塩田昌弘, How to avoid integration in singularity theory, Symposium on 0-minimal structure, 2011 年 8 月 6 日, カナダ, トロント大学
④ 塩田昌弘, Analytic and Nash equivalence of Nash maps, 空間認識のための特異点理論研究集会, 2010 年 6 月 3 日, 伊勢観光文化会館

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：

番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
塩田昌弘（SHIOTA Masahiro）
名古屋大学　多元数理科学研究科　名誉教授
研究者番号：00027385

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：