

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 9 月 18 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540078

研究課題名(和文)ベクトル束・D加群・調和バンドルの研究

研究課題名(英文)Study on vector bundles, D-modules and harmonic bundles

研究代表者

望月 拓郎(MOCHIZUKI, TAKURO)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：10315971

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：調和束や純ツイスターD加群に関する研究を整備して出版しました。そして、混合ツイスターD加群、ベッチ構造付ホロノミックD加群の研究を行い、ホロノミックD加群上の様々な構造の関手性について研究しました。また、二重周期インスタントンを無限次元のワイルド調和束とみなす観点から、その無限遠における漸近挙動を研究しました。これを基にして二重周期的インスタントンと楕円曲線上のワイルド調和束の間のナーム変換を確立しました。さらに、ある種の二次元戸田格子の解と調和束の関係をを用いて、解の分類を行いました。さらに、付随して得られる有理型平坦束のストークス構造を具体的に計算しました。

研究成果の概要(英文)：I published a monograph on the study of wild harmonic bundles and pure twistor D-modules. I introduced the concepts of mixed twistor structure and Betti structure on holonomic D-modules, and established their functoriality with respect to various standard operations. I applied the ideas and the results in the theory of wild harmonic bundles to the study of doubly periodic instantons and 2-dimensional Toda equations. I studied the asymptotic behaviour of doubly periodic instantons by regarding them as infinite dimensional harmonic bundles. On the basis of the result, I established that the Nahm transform give an equivalence between wild harmonic bundles on elliptic curve and doubly periodic instantons. As for the Toda equations, I observed an equivalence of solutions of the Toda equations and some type of harmonic bundles, which was useful for the classification of the solutions. I also computed the Stokes structure of the associated meromorphic flat bundles.

研究分野：微分幾何

キーワード：調和バンドル ツイスターD加群 ホロノミックD加群 戸田格子 インスタントン ベッチ構造

1. 研究開始当初の背景

(1) 私は 20 世紀末から、ワイルド調和バンドルと純ツイスター D 加群の研究をしてきました。Carlos Simpson によって提案された原理 "Simpson's Meta Theorem" に導かれてホッジ構造・ホッジ構造の変動についての話をツイスター構造・調和バンドルの話に拡張する、ということが主要な目標となっていました。そして、ワイルド調和バンドルの漸近挙動を研究し、その結果を基にしてワイルド調和バンドルの小林・Hitchin 対応、半単純な有理型平坦束の特徴付けを示しました。さらに齋藤盛彦の純ホッジ加群の理論のツイスター版として Claude Sabbah によって導入された純ツイスター D 加群に、調和バンドルの理論を適用することで、純ツイスター D 加群の関手性や純ツイスター D 加群と調和バンドルの対応などを確立しました。これを用いて、代数的ホロノミック D 加群の半単純性に関する柏原正樹の予想を解決しました。また、この研究の過程で、高次元代数多様体上の有理型平坦束の局所的な構造についての理論が必要となったため、その整備を行いませんでした。これらの結果をまとめたプレプリントを 2008 年に発表していました。

(2) この研究の延長として、"混合ツイスター D 加群" の理論の構築が問題として考えられました。ホッジ理論における一つの究極的な対象が、齋藤盛彦の混合ホッジ加群です。Simpson's Meta theorem によれば、混合ホッジ加群のツイスター版があるはずですが、それは純ツイスター D 加群の混合版でもあるはずですが、純ツイスター D 加群の理論は、半単純な代数的ホロノミック D 加群の研究において有効に活用できましたが、より一般の対象や関手を扱うには、混合にまで拡張することが重要です。

ミラー対称性の研究などでも "一般化されたホッジ構造" というものが役割を果たすようになってきていました。ツイスター構造はホッジ構造の一般化の中でもっとも基礎的なものですから、混合ツイスター D 加群の理論にきちんとした形を与えることには意義があると考えました。

混合ツイスター D 加群は混合ホッジ加群のツイスター版であり、ホッジの場合のアイデアを多くとり入れることができると期待するのは自然です。しかし、それでもツイスター D 加群とホッジ加群の素材の違いなどにより、全く同じようにできるという状況ではありませんでした。特に混合ツイスター D 加群の "はりあわせ" や "双対" をツイスターの場合にどのように処理するかは、大きな問題でした。

関連して、ホロノミック D 加群の "ベッチ構造" をどのように考えれば良いのかを明確にすることも興味のある問題となっていま

した。複素数係数の偏屈層と正則ホロノミック D 加群の間の同値が、柏原と Zoghman Mebkhout によって独立に確立され、Riemann-Hilbert 対応として知られています。これは、正則ホロノミック D 加群を位相的なデータで記述できるということの意味します。この Riemann-Hilbert 対応を用いると正則ホロノミック D 加群に関してはベッチ構造の概念は明快に定義されます。しかし、正則でないホロノミック D 加群の場合にはストークス構造を考慮に入れる必要があります。有理型平坦束に関しては、局所構造をよく理解できるようになったため、位相的な記述もできるようになり、ベッチ構造をどのように考えれば良いのかもはっきりしていました。しかし、そのような場合を除くと、ホロノミック D 加群を位相的なデータで記述する方法は当時は知られていなかったため、ベッチ構造の定義や関手性は明らかではありませんでした。ベッチ構造はそれ自身が重要な概念であり、期待される非可換ホッジ理論の一部となることが期待されています。ストークス構造との両立性条件の関手性という観点からも、興味のある問題でした。

2. 研究の目的

(1) 1. で触れたワイルド調和バンドルと純ツイスター D 加群についてのプレプリントを、よりわかりやすいものにして出版にいたることも重要な目的でした。

(2) 1. でも述べた、ホロノミック D 加群上のベッチ構造や混合ツイスター構造などを定式化し、その関手性を示すことを研究の目標としました。これらは、1 でも述べたように、一般化されたホッジ理論を考える上で基礎的な重要性を持ちます。

(3) 研究の新たな展開のために、調和バンドルや純ツイスター D 加群の研究で得られた知見・結果を、関連する対象の研究に適用することも目標としました。より具体的には、楕円曲線上のワイルド調和バンドルの間のナム変換や、ある種の調和バンドルと対応する 2 次元戸田格子を研究しました。

3. 研究の方法

(1) プレプリントを丁寧に読みなおし、議論を整理しなおしました。

(2) 偏屈層やホロノミック D 加群のはりあわせに関する Alexander Beilinson の方法に着目しました。これを用いると、ベッチ構造や混合ツイスター構造のはりあわせの問題が、局所化の問題に帰着されます。局所化に関しては比較的議論しやすいので、これで問題がだいぶわかりやすくなりました。また、齋藤盛彦の混合ホッジ構造の理論を勉強し、

多くのアイデアをとりいれました。

(3) 二重周期インスタントンを無限次元の調和バンドルとみなすことで、調和バンドルの漸近挙動との類似を追究しました。また、射影直線上の D 加群について知られていた局所フーリエ変換の類似や、代数的ナーム変換を導入し、その詳しい性質を調べました。

(4) 2次元戸田格子の解の分類に、調和バンドルの小林・ヒッチン対応を用いました。また、付随する有理型平坦束について、ストークス構造とモノドロミーの関係を見出し、ストークス構造の計算に用いました。

4. 研究成果

(1) 有理型平坦束とストークス構造を持つ局所系の間での Riemann-Hilbert-Birkhoff 対応がより明確に定式化されました。これを用いて、有理型平坦束のモノドロミーとストークス構造を不変とするような変形について、より強い結果が示されました。これらも含めた形で、ワイルド調和バンドルと純ツイスター D 加群についてのモノグラフは出版にいたりしました。([図書] を参照。)

この Riemann-Hilbert-Birkhoff 対応についてのサーベイを書きました。さらに、Riemann-Hilbert-Birkhoff 対応を用いて、ホロノミック D 加群のエルミート双対についての柏原の予想を解決しました。これらは [雑誌論文] として出版されました。

関連して射影直線上の有理型平坦束のフーリエ変換について研究し、ストークス構造の変換が位相的な記述を与えました。この結果は [雑誌論文] として出版されました。

そのほかに、関連する話として、TERP 構造と呼ばれる一般化ホッジ構造や有理型平坦束の漸近解析についてのサーベイをかきました。さらに、ツイスター冪零軌道と偏極付混合ツイスター構造の対応や、ある種の TERP 構造に関する Hertling と Sevenheck による予想を解決しました。これらは [雑誌論文] として出版されました。

(2) ベッチ構造に関しては、関手性を持つ良い定義が与えられました。結果として、ベッチ構造を持つようなホロノミック D 加群についての積分、引き戻し、双対、テンソルなどの標準的な関手が得られました。これは、ストークス構造とベッチ構造の両立性が様々な関手で保たれる、という興味深い結果を含んでいます。また、この研究の過程で、複素多様体 X 上の実ブローアップ上の正則関数のなす層が、 X の構造層上で平坦であることを示しました。これらの結果は出版にいたりしました。([図書] を参照。)

混合ツイスター D 加群についても、適切な定義が与えられ、積分、引き戻し、双対、テンソルなどの標準的な関手が得られ、さらに混合ツイスター構造の変動との対応が示されるなど、期待される基礎的な結果が確立されました。この結果は出版される予定です。

([図書] を参照)

さらにこの理論を用いて、Kontsevich complex の研究 'A twistor approach to the Kontsevich complexes' (arXiv:1501.04145) や超幾何系の混合ツイスター構造とその応用についての研究 'Twistor property of GKZ-hypergeometric systems' (arXiv:1501.04146) を行いました。

(3) 二乗可積分という条件を満たす二重周期インスタントンの漸近挙動が、調和バンドルの漸近挙動によく類似していることを確立しました。特に、曲率の評価が得られ、正則ベクトル束が無限遠にまでフィルター付ベクトル束として延長されることを示しました。代数的ナーム変換が安定性条件を保つこと、包含的であることも示しました。ナーム変換が、代数的ナーム変換を誘導することを示しました。これらを用いて、楕円曲線上のワイルド調和束と二乗可積分な二重周期インスタントンの間の同値が、ナーム変換によって与えられることを確立しました。これらの結果は [雑誌論文] として出版されました。

(4) 調和バンドルの小林・ヒッチン対応を用いることで、ある種の 2次元戸田格子の解を実数の組と対応づけることができました。そして、この実数の組によって付随する有理型平坦束のストークス構造やモノドロミーを記述できることを洞察しました。これらを用いて、有理型平坦束が有理数体上のベッチ構造を持つための必要十分条件を与え、簡単な場合には完全に分類しました。この結果は [雑誌論文] として出版されました。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

T. Mochizuki,
Harmonic bundles and Toda lattices with opposite sign II,
Comm. Math. Phys. 328, (2014) 1159--1198
DOI:10.1007/s00220-014-1994-0

T. Mochizuki,
Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic instantons

with square integrable curvature,
Geometry & Topology, 18 (2014) 2823--2949
DOI: 10.2140/gt.2014.18.2823

T. Mochizuki,
Asymptotic behavior of variation of pure
polarized TERP structure,
Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47, (2011)
419--534

T. Mochizuki,
The third cohomology groups of dihedral
quandles,
J. Knot Theory Ramifications, 20, (2011)
1041--1057

T. Mochizuki,
The Stokes structure of a good
meromorphic flat bundle,
J. Inst. Math. Jussieu 10, (2011). 675--712

T. Mochizuki,
Note on the Stokes structure of Fourier
transform,
Acta Math. Vietnam. 35, (2010) 107--158

〔学会発表〕(計 1 1 件)

T. Mochizuki,
Wild harmonic bundles and twistor
D-modules,
国際学会 “ International Congress of
Mathematicians ”,
2014 年 8 月 20 日, COEX (韓国), 基調講
演.

T. Mochizuki,
Mixed twistor structure and
GKZ-hypergeometric systems,
研究集会 “ The Geometry, Topology and
Physics of Moduli Spaces of Higgs
Bundles ”,
2014 年 8 月 4 日, シンガポール国立大学
(シンガポール), 招待講演.

T. Mochizuki,
Wild harmonic bundles and some
applications,
国際学会 “ The Asian Mathematical
Conference 2013 ”,
2013 年 7 月 2 日, BEXCO (韓国), 基調講
演

T. Mochizuki,
Nahm transforms for harmonic bundles,
研究集会 “ Development of Moduli Theory:
Conference ”,
2013 年 6 月 18 日, 京都大学数理解析研
究所, 招待講演

T. Mochizuki,
Harmonic bundles and Toda lattices with
opposite sign,
研究集会 “ Recent trends in Algebraic
Analysis ”,
2013 年 2 月 23 日, パドヴァ大学 (イタ
リア), 招待講演

T. Mochizuki,
Harmonic bundle and Toda lattice with
opposite sign,
研究集会 “ Various Aspects on the Painleve
Equations ”,
2012 年 11 月 27 日, 京都大学, 招待講演

T. Mochizuki,
Harmonic bundle and twistor D-module,
研究集会 “ Singularities of differential
equations in algebraic geometry ”,
2012 年 6 月 4 日, Centre International
de Rencontres Mathematiques
(フランス), 招待講演

T. Mochizuki,
The asymptotic behaviour of doubly
periodic instantons and Stokes
structure”,
研究集会 “ Spring School on Algebraic
Microlocal Analysis ”,
2012 年 5 月 16 日, ノースウェスタン大
学 (アメリカ合衆国),
招待講演

望月拓郎,
ホッジからツイスターへ -調和バンドルと
その周辺の話題について-
日本数学会総会, 2012 年 3 月 26 日,
東京理科大学 神楽坂キャンパス, 企画特別
講演.

T. Mochizuki,
From Hodge toward Twistor,
研究集会 “ Noncommutative Geometry and
Physics and Hayashibara forum on
Symplectic Geometry, Noncommutative
Geometry and Physics ”,
2010 年 11 月 1 日, 2 日 (二回講演), 京都
大学, 招待講演

T. Mochizuki,
Kobayashi-Hitchin correspondence for
D-modules,
研究集会 “ PRIMA Conference on
Geometric Analysis ”,
2010 年 7 月 29 日, プリティッシュコロ
ンビア大学 (カナダ),
招待講演

〔図書〕(計 3 件)

T. Mochizuki,
Wild harmonic bundles and wild pure
twistor D-modules,
フランス数学会 607 ページ (2011)

T. Mochizuki,
Holonomic D-modules with Betti structure,
フランス数学会 2014, 205 ページ

T. Mochizuki,
Mixed twistor D-modules,
Lecture Notes in Mathematics, Springer
Verlag, to appear. 約 500 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

望月拓郎 (MOCHIZUKI TAKURO)
京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号 : 10315971

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :