

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540079

研究課題名（和文） ホップ空間の積構造の研究とその応用

研究課題名（英文） Multiplicative structures of Hopf spaces and its applications

研究代表者 岸本大祐 (KISHIMOTO DAISUKE)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60402765

研究成果の概要（和文）：ホップ空間の積構造を、ゲージ群を通して研究した。ゲージ群とは主束の自己同型のなす位相群であり、主束の構造群の積構造をよく反映し、その分類空間はある写像空間とみなせることが知られている。本研究において、リー群の $\text{mod } p$ 分解の類似をゲージ群に対して構成し、その応用として、ゲージ群の p 局所ホモトピー型の分類や、随伴束の分解との関係を明確にした。これにより、ゲージ群の p 局所ホモトピー論の基礎を築いた。また、ファイバーワイズ高次ホモトピー結合性の基礎理論を構築し、ゲージ群から主束の構造群への自然な準同型の An 空間としての切断を、主束の随伴束に関するファイバーワイズ An 空間としての自明性と関連させることにより調べた。これにより、ゲージ群の分裂と随伴束の自明性との同値性、また、主束の構造群の高次ホモトピー可換性との関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Multiplicative structures of Hopf spaces were studied through gauge groups. A gauge group is the topological group of automorphisms of a given principal bundle, which reflects the multiplicative structure of the structure group of the bundle. It is known that the classifying space of gauge groups can be identified with certain mapping spaces. In this programme, I gave the $\text{mod } p$ decomposition of gauge groups which is the gauge group analogue of the $\text{mod } p$ decomposition of Lie groups, and as its applications, the p -local homotopy types of gauge groups were determined and the relation between the decomposition of the adjoint bundles and the $\text{mod } p$ decomposition of gauge groups were elucidated. This yields a basis of the study of the p -local homotopy theory of gauge groups. The foundation of fiberwise higher homotopy commutativity is developed. The existence of a section of the natural homomorphism from the gauge group to the structure group of the principal bundle as An spaces is related to the triviality of the adjoint bundle as a fiberwise An -space. From this, it is shown that the the existence of the An -section of the homomorphism is equivalent to the triviality of the adjoint bundle as a fiberwise An -space. Moreover, these equivalent condition turns out to have a connection with the higher homotopy commutativity of the structure group of the principal bundle.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	700000	210000	910000
2011 年度	800000	240000	1040000
2012 年度	600000	180000	780000
総計	2100000	630000	2730000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何

キーワード：幾何学、トポロジー

1. 研究開始当初の背景

ホップ空間の研究はホモトピー論の新しい手法を試す試金石として盛んに行われており、そのホモトピー型に関しては多くの結果が得られている。しかしながら、ホップ空間の積構造についての結果の数は少ない。ホップ空間の積構造に関する結果で最も有名なものが Hubbuck によるトーラス定理であるが、これは有限ホップ空間にしか適用できない。無限ホップ空間に関しては、局所化されたリー群のホモトピー可換性を McGibbon が研究しており、その後、鍛冶と岸本によりホモトピーベキ零性も研究された。このように直接積構造をみるのは困難が多いことが知られている。そこで、ゲージ群という与えられた位相群を拡大して得られるものを通して、ホップ空間の積構造を研究することが提唱され、様々な応用が考えられるようになった。

2. 研究の目的

ホップ空間、特にループ空間の積構造について、それを構造群とする種族のゲージ群を調べることにより解析する。特に、ゲージ群の局所化により現れる性質と、構造群の積構造との関係性を明らかにし、局所化による構造群の積構造の変化を調べる。一方、構造群の情報からゲージ群のホモトピー型に関する情報を得ることも考える。

3. 研究の方法

ホップ空間の積構造を調べる上で最も重要なのは交換子写像であり、それを与えられた空間上に引き戻した Samelson 積も同様に重要である。ゲージ群はこの Samelson 積、もしくはその A_∞ 的一般化である写像のホモトピーファイバーであることが知られている。これを用いて、ゲージ群のホモトピー論と構造群の積構造とを関連づけ、互いの結果を還元する。また、ゲージ群の分類空間は、ある種の写像空間であるので、写像空間のトポロジーとの関連もみる。特に、この写像空間に関する評価写像が誘導する評価ファイブレーションを考えると、その連結写像のホモトピーファイバーがゲージ群となることから、この評価ファイブレーションを解析する。この評価ファイブレーションのループをとったものが An 空間として分裂することと、随伴束がファイバーワイズ An 空間としての構造を関連づける。これにより、上記連結写像が特殊な場合は Whitehead 積 (よって、その随伴が Samelson 積である。) という Whitehead による古典的な結果の高次版を与える。これをもとに、ゲージ群の分裂を底空間の性質により与える。また、ゲージ群とリー群の性質の共通点を局所化を通して調べる。

4. 研究成果

ホップ空間の積構造はトポロジーにおいて重要なものであるが、高次構造を含めて、知られていることは少ない。特に、局所化によるその退化に関してはあまりよくわかっていない。そこで、ゲージ群の局所化を考え、そのホモトピー型を調べることにより、構造群の局所化による積構造の退化を調べる。リー群に対しては $\text{mod } p$ 分解と呼ばれる小さな空間による積分解が知られている。そこで、本研究において、その類似をゲージ群でも考え、構成した。これはリー群の分解と両立する自然なものである。この応用として、ゲージ群の局所ホモトピー型をいくつか決定した。この局所ホモトピー型に関してはヒップ空間の懸垂による分解を用いてさらに一般の場合の結果を得た。ここではホモトピー型が、ある種の Samelson 積の位数で分類されることが示され、この位数の具体的な計算方法を K 理論を用いて与えた。ゲージ群は随伴束という主束に付随するファイバー束の切断全体と同一視されることがおり、この随伴束は自由ループ空間の引き戻しとみなせることも知られている。そこで、自由ループ空間のコホモロジーをかいせきすることにより、随伴束の非分解性を示し、ゲージ群の $\text{mod } p$ 分解が随伴束から誘導されるものばかりではないことを示した。このように、ゲージ群と随伴束とのギャップを与える例はこれまで一つしか知られていなかった。

有限ホップ空間がホモトピー可換であるなら、それはトーラスのホモトピー型をもつことが Hubbuck による古典的な結果として知られている。では、ホップ空間が無限のときどうなるかが次に問題となるが、無限ホップ空間をすべて考えるのは余りに対象が広く意味がない。そこで、McGibbon は局所化されたリー群についてこの問題を考えた。上記の通り、リー群は p 局所化するとそのホモトピー型は p が大きくなるにつれ単純なものとなる。そこで、群構造についてもこのようなことが成り立つだろうと推測されるが、ホモトピー可換性に関してはこの推測が正しいことを McGibbon は証明した。その後、ホモトピー可換性の次に考えるべき不変量であるホモトピーベキ零性についてはこの推測が正しくないことが岸本により示されている。本研究ではこの問題をゲージ群で考えた。つまり、上記 $\text{mod } p$ 分解によりゲージ群の p 局所化は p を大きくするにつれ、そのホモトピー型は単純なものとなることがわかった。したがって、局所化したリー群と同様に、ゲージ群の積構造も単純になるのかを考えた。主束として簡単のために 4 次元球面上の $SU(n)$ をとる。このとき、ゲージ群は $p > 2n+1$

のときはホモトピー可換、 $p < 2n+1$ のときはホモトピー可換でなく、 $p=2n+1$ のときは主束の 2 次 Chern 数によりホモトピー可換かどうか完全に決まることを示した。この研究ではこれまでのゲージ群の研究には使われてこなかった、ループ空間のホモロジーとそれによるループ空間の分解の技法が用いられた。この研究は S.D. Theriault 氏と河野明氏との共同研究である。

与えられた主 G 束のゲージ群からファイバーへの制限により与えられる G への準同型はゲージ群の研究において基本となる。ゲージ群の分類空間が BG への写像のなす写像空間となり、これに関する評価写像のループがこの準同型である。この写像が An 写像として分裂することをファイバーワイズホモトピー論の言葉で記述することに成功した。上記分裂は問題の準同型が An 写像となる切断をもつことと同値であることが示され、これは、与えられた主束の随伴束がファイバーワイズ An 空間としてじめいとなることと同値であるというように記述される。ここで、ファイバーワイズな $A\infty$ 空間が初めて導入され、その射影空間や、それを用いた An 空間の性質の言い換えなどのファイバーワイズ高次ホモトピー結合性の基礎理論が築かれた。その後、このファイバーワイズ高次ホモトピー結合性の理論は薦谷充伸氏らによりさらに深く研究されている。これらの結果により、上記準同型の分裂がある種の障害理論により理解されることがわかった。その結果、ゲージ群の分裂を与えるための十分条件を主束の底空間の Lusternik-Schnirelmann カテゴリー数により与えることに成功した。また、この障害理論による記述は、構造群 G の高次ホモトピー可換性と同じであることがわかり、ゲージ群の分裂、評価写像の切断の拡張、 G の高次ホモトピー可換性という一見異なる三つの性質が実は同値であることを示した。その副産物として、Whitehead による評価写像の連結写像の Whitehead 積による記述の高次版を得た。つまり、評価ファイブレーションを考える際の定義域となる空間が懸垂空間である場合は Whitehead 積で表されることが知られていたが、本研究において、定義域が一般の空間の場合にも Whitehead 積の高次版と思える、共役写像の導く分類空間の間の写像により記述されることがわかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① D. Kishimoto and A. Ohsita, KO -theory of exceptional flag manifolds, (査読有) Kyoto J. Math., To appear.

② D. Kishimoto, A. Kono and M. Tsutaya, On p -local homotopy types of gauge groups, (査読有) Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A, to appear.

③ D. Kishimoto, A. Kono and M. Tsutaya, Mod p decompositions of gauge groups, (査読有) Alg. Geom. Topology, to appear.

④ D. Kishimoto, A. Kono and T. Nagao, Commutativity of localized self-homotopy groups of symplectic groups, (査読有) Topology Appl. 158 (2011) no. 8, 1025-1032.

⑤ D. Kishimoto and A. Kono, Splitting of gauge groups, (査読有) Trans. Amer. Math. Sci. 362 (2010), no.12, 6715-6731.

⑥ D. Kishimoto and T. Nagao, Commutativity in special unitary groups at odd primes, (査読有) Topology Appl. 157 (2010) no.12, 1949-1954.

⑦ D. Kishimoto and A. Kono, Note on mod p decomposition of gauge groups, (査読有) Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 86 (2010), no.1, 15-17.

⑧ D. Kishimoto and A. Kono, On the cohomology of free and twisted loop spaces, (査読有) J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 5, 6466-653.

⑨ D. Kishimoto, Generating varieties, Bott periodicity and instantons, (査読有) Topology Appl. 157 (2010) no.3, 657-668.

⑩ S. Kaji and D. Kishimoto, Homotopy nilpotency in p -regular loop spaces, (査読有) Math. Z. 264 (2010), no.1, 209-224.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岸本大祐 (DAISUKE KISHIMOTO)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：60402765

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

河野明 (AKIRA KONO)
同志社大学・理工学部・教授
研究者番号：00093237

岩瀬則夫 (NORIO IWASE)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：60213287

佃修一 (SHUICHI TSUKUDA)
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：50305182