

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究 C

研究期間：2010～2012

課題番号：22540080

研究課題名（和文） 無限群作用付きゲージ理論の構成

研究課題名（英文） Gauge theory with infinite group actions

研究代表者 加藤 毅 (Kato Tsuyoshi)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20273427

研究成果の概要（和文）：

(1) 離散力学系からオートマトンへ、スケール変換でつなぐトロピカル幾何学を用いて、互いに相異なる有理力学系や偏微分方程式の間の比較定理を導いた。応用としてオートマタ群の理論における Burnside 群に適用することで、擬再帰的な有理力学系の初めての例を与えた。

(2) 高い対称性を持つ無限次元概ケーラー多様体上で正則曲線のモジュライ理論の構成を行い、モジュライ空間のコンパクト性に関わる結果を得た。その応用として、樹木に作用する群のハミルトン変形理論の構成を行い、対応する群の非有限性を示した。

研究成果の概要（英文）：

(1) Tropical geometry connects discrete dynamical systems with automata. We used it to induce an analytic comparison theorem between mutually different rational dynamics or PDEs. We applied the method to theory of automata groups, particularly to Burnside groups and obtained a new example of infinitely quasi-recursive rational dynamical systems.

(2) We constructed moduli theory of holomorphic curves over infinite dimensional almost Kaehler manifolds with high symmetry. As an application, we constructed Hamiltonian deformation of groups acting on trees, and verified that for some class of Hamiltonians, they must be always uniformly infinite in ours sense.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：無限群, 非コンパクト幾何解析, スケール変換

## 1. 研究開始当初の背景

非コンパクト空間上で幾何解析を行うには、その空間にある種の対称性が要求されるが、特にモジュライ理論に関して組織的な構成はこれまでなされていなかった。

## 2. 研究の目的

ここでは非コンパクト空間に無限群が作用している場合に、モジュライ理論の構成を行うことが目的である。

## 3. 研究の方法

コンパクト多様体上で構成されたモジュライ理論を、無限群作用がある場合の非コンパクト空間上で展開する。そのために、無限群の適応するクラスの構成を行い、そのクラスの群が作用する非コンパクト空間に対してモジュライ理論の構成を行う。またそこに適合できる無限群のクラスの大域解析的な研究を行う。

## 4. 研究成果

(1) 離散幾何学の研究手法は、スケール変換を関数解析的に取り扱うことである。偏微分方程式や離散力学系の理論を用いることで、力学系のスケール変換の基礎を構成する。特にオートマトンと、有理力学系や偏微分方程式をつなげることで、それぞれに関わる幾何学的対象の間の関係について解析的な研究を行う。具体的には、離散力学系からオートマトンへ、スケール変換でつなぐトロピカル幾何学を用いて、互いに相異なる有理力学系の一様評価を導くことに成功した。さらにこれを発展させて互いに相異なる偏微分方程式の間の比較定理を導いた。それにより、軌道の大域幾何学的性質に注目することで、互いに異なる偏微分方程式の間の関係が存在することを示した。特に関係を持つ偏微分方程式の対を構成する手法を導いた。また互いに関係を持たない偏微分方程式の対の構成に成功した。これによりその関係が非自明であることがわかる。

(2) 中間的な増大度を持つ群の発見によるMilnor問題の否定的解決、有限生成無限捻れ群の構成によるBurnside問題の解決、非一様増大度を持つ群の構成、など幾何学的群論において、オートマタ群は極めて重要な未解決問題に解答を与えてきた。この研究により、トロピカル幾何学をオートマタ群の研究に応

用することに成功した。特にその枠組みをBurnside群に適用することで、擬再帰的な有理力学系の初めての例を与えることに成功した。これをさらに押し進めて、偏微分方程式による擬再帰偏微分方程式の構成が今後の目標となる。

(3) 非コンパクト空間上での関数解析的手法を開発することを行った。これまで、非線形偏微分方程式を用いたコンパクト多様体上の解析は大きく発展してきた。一方で非コンパクト空間上の解析は、アティヤ・シンガー指数定理を拡張する研究が大きく進展してきたものの、その非線形版は始まったばかりでありいまだ発展途中である。コンパクト多様体上で機能してきたメカニズムをそのまま非コンパクト空間上で行うことは、一般的にはほとんど不可能であるが、それが実行可能となる幾何学的な空間のクラスを定式化することで、非線形偏微分方程式を用いた非コンパクト空間上の大域解析の構成を行った。具体的には、高い対称性を持つ無限次元ケーラー多様体をターゲットとする、概正則曲線のモジュライ理論の構成を行った。特に、その多様体が高い対称性、可積分性を持つ場合に、モジュライ空間の線形化写像のフレドホルム性、モジュライ空間のコンパクト性を示すことで、局所コンパクトを持たない無限次元多様体上でもモジュライ空間の理論のメカニズムが成り立つことを示した。さらにそのような多様体を摂動することで対称性や可積分性を崩しても、その性質が成り立つことを示した。またモジュライ空間の強コンパクト性を導いた。そのことを示すために、空間の無限遠点で正則曲線に収束するような列は存在しないことを示した。以上のことから、そのクラスの無限次元空間に対しては、モジュライ空間の解析が効果的に行われたと言ってよいが、一方で対応できる無限次元多様体のクラスをより広げることが今後の課題となる。

(4) 無限次元モジュライ理論の構成を用いて、樹木に作用する群のハミルトン変形理論の構成を行った。樹木に作用する群は、無限次元複素射影空間の自己同型群に、共役を除いて一意に埋め込める。これを用いて、それらの群のハミルトン微分同相写像による変形を行った。Burnside問題に関連して、特に捻れ性質を保った変形の存在が重要な問題であるが、ある種のハミルトン関数のクラスに対して、どのような変形を行っても漸近的に捻れが存在できないことを示した。またそこから、モジュライ空間のコボルディズムから派生する不変量と、ハミルトン微分同相写像の繰り返し写像の微分の非有界性を計る不変量との間

に、非自明な不等式が存在することを発見した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- (1) T.Kato, Infinite sequences of almost Kaehler manifolds with high symmetry, their perturbations and pseudo holomorphic curves, arXiv 1205.2938 (2012).
- (2) T.Kato and S.Tsujimoto, Analytic relation on partial differential equations, Journal of Math Res vol4-4 p125-139 (2012).
- (3) T.Kato, Asymptotically quasi-conformal four manifolds, Journal of Math. Soc. of Japan vol 64-2 p423-487 (2012).
- (4) T.Kato, Automata in groups and dynamics and induced systems of PDE in tropical geometry, Journal of Geometric Analysis, (2012) on line available (87 pages)
- (5) T. Kato, An asymptotic comparison of differentiable dynamics and tropical geometry, Mathematical Physics, Analysis and Geometry(14-1)39-82 (2011).
- (6) T. Kato, Geometric Representations of Interacting Maps, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 48 pages Volume 2010 (2010).
- (7) T.Kato, Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps, in the Proc. of the 1st MSJ-SI, Adv. Studies in Pure Mathematics 57 pp. 243-262 (2010).

[学会発表] (計 17 件)

- (1) T.Kato, A rough analytic relation on PDE, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 2013 16-19 March, Kyoto University
- (2) T.Kato, Hamiltonian deformation of groups acting on trees, Discrete Geomtry and dynamical systems, Kyoto University, 2013 22-25 January
- (3) T.Kato, Hamiltonian deformation of groups acting on trees, Geometry and Analysis, Universite Paris 7, Paris

December 2012.

- (4) T.Kato, Moduli theory over infinite dimensional spaces, 日中幾何学友好研究集会 四川大学 成都 中国 September 2012.
- (5) T.Kato, Moduli theory over infinite dimensional spaces, Geometry and Analysis, Universite Paris 7, Paris September 2012.
- (6) T.Kato, Symplectic capacity on infinite dimensional spaces, Topology and Functional Analysis, Fudan Unviersity, China, May 2012.
- (7) T. Kato, Automata groups and tropical geometry, International Conference on Groups, Dynamics and Random Structures, Texas A&M, USA, March 2012.
- (8) T. Kato, Dynamical Burnside Problem, Fourth friendship meeting between Fudan and Kyoto Universities, Shanghai, China, November 2011.
- (9) T.Kato, Automata groups, tropical geometry and dynamical Burnside problem, Seminar on geometry, Universite Paris 7, France, December 2011.
- (10) T. Kato, Dynamical Burnside Problem, Seminar on groups, Vanderbilt University, USA, November 2011.
- (11) 加藤 毅, オートマタ群とトロピカル幾何学, 仙台シンポジウム 東北大学 2011年8月
- (12) T. Kato, Hyperbolic systems of PDEs and automata groups, Workshop on automata groups and non-commutative geometry, Univ.Paris 7, France, March2011.
- (13) T. Kato, Automata groups and large scale analysis of PDE, Long term workshop, Geometry and Analysis, Kyoto University, March 2011.
- (14) T. Kato, Hyperbolic systems of PDEs, and automata groups in tropical geometry, International workshop Geometry and Analysis,Universite Paris 7, France, December 2010.
- (15) T. Kato, A rough analytic relation on the set of partial differential equations, International conference on Mathematical Sciences and Their Applications, Yamanashi, Japan, September 2010.

(16) 加藤 毅オートマタ群と 2 変数偏微分  
方程式類 幾何学阿蘇研究集会 熊本  
2010 年 8 月

(17) T. Kato, Automata groups and PDE in  
tropical geometry 確率論と幾何学  
東北大学 August 2010.

6. 研究組織

(1) 研究代表者 加藤 毅 (Kato Tsuyoshi)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：20273427

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：