様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　3 月 31 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００８３
研究課題名（和文）アフィン球面と射影極小曲面の幾何
研究課題名（英文）Geometry of affine spheres and projectively minimal surfaces
研究代表者　佐々木　武（SASAKI TAKESHI）
神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点研究部・名誉教授
研究者番号：00022682

研究成果の概要（和文）：２次元のアフィン球面は射影極小曲面の典型例である一方，後者のクラスは大変広い．アフィン球面のクラスと射影極小曲面のクラスの途中に位置するクラスを求めることが一つの問題である．極小中心アフィン曲面がいつ射影極小であるか，対応する微分方定式はどのように記述されるか，また，特別なクラスの射影極小曲面である一致曲面のマーカス変換をどう構成するか，余次元２の極小中心アファイン曲面の射影的な構成はどうすればよいかを考察した.また,関連する研究として超幾何微分方程式系のモノドロミー群の可約性,アフィン凸曲面のアフィン体積概念の数理統計への応用，離散曲面の構成の問題を考察した.

研究成果の概要（英文）: While affine spheres are classically known to be projectively minimal, projectively minimal surfaces make a very large class. To find intermediate classes between affine spheres and projectively minimal surfaces is the problem considered here. We characterized the condition for centroaffinely minimal surfaces to be projectively minimal and the form of the associated system of differential equations; we gave a procedure of how to construct Marcus transformations of coincidence surfaces and centroaffinely minimal surfaces of codimension two. Related results include a study of reducibility of the monodromy group of certain hypergeometric systems of differential equations, an application of the affine volume to mathematical statistics, and a construction of discrete surfaces.

交付決定額　（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
総　計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：　数学・幾何学
キーワード：アフィン球面，射影極小曲面，中心アフィン曲面，超幾何微分方程式系，
曲面の変換，離散的曲面論，線叢

１．研究開始当初の背景

アフィン球面の研究は1900年代のTzitzeica,

Blaschke 等による当初の研究に続き，最近の 20 年の間に，その構成や，局所的性質，大域的性質などの研究が進み，その多様性があきらかになった．射影極小曲面も 1900 年代の初め頃に存在がわかり，その後様々な変換の理論が進んだ．アフィン球面は典型的な射影極小曲面である．アフィン球面が多様であることがわかるにつて，射影極小曲面のクラスは大変大きいことがより明らかになった．また，Demoulin 変換やマーカス変換という射影極小曲面を構成する方法の定式化が進んだ．［S］T. Sasaki　(Kyushu J. Math. **60**(2006)，101－243) を参照．その一方，アフィン球面以外の射影極小曲面の具体例の構成はまだまだと言える．

２．研究の目的
射影極小曲面の構成を行うことが主目的である．すでに知られている射影極小曲面のクラスにアフィン球面，Godeaux-Rozet 曲面，Demoulin 曲面がある．特に，アフィン球面のクラスとの関係を念頭において，取扱い易い新しいクラスの構成，それに関連する研究を進める．

３．研究の方法
射影曲面の研究を一つのアフィンアトラスに制限して，等積アフィン幾何として考える他に，中心アフィン幾何としてとらえることができる．射影極小性にもっとも近い概念は極小中心アフィン曲面である．その関係を調べる．また，射影曲面を４次元のアフィン空間の余次元２の中心アフィン曲面として考えることは論理的には同値である．そこで，そのような余次元２の曲面の極小性について既存の研究をもとに新たに考察する．また，射影曲面は方程式系

$$z_{xx} = bz_y + pz, \quad z_{yy} = cz_x + qz \qquad (*)$$

によって記述される．射影極小曲面から別の射影極小曲面を構成する一般的な方法としてマーカス変換がある．対応する方程式系の変換を一般的に記述する方法もわかっているが，実際の例示は少ない．これを検討する．

４．研究成果
(1)射影極小となる中心アフィン極小曲面の構成中心アフィン曲面は方程式系

$$z_{xx} = (\alpha_x + \sigma_x)z_x + bz_y,$$

$$z_{xy} = \sigma_y z_x + \sigma_x z_y - h_z,$$

$$z_{yy} = cz_x + (\alpha_y + \sigma_y)z_y,$$

でかけるσ，b，c，hはスカラーで，$\alpha = \log h$．これらは可積分条件

$$c_x = -c\alpha_x + \sigma_{yy} - \alpha_y\sigma_y,$$

$$b_y = -b\alpha_y + \sigma_{xx} - \alpha_x\sigma_x,$$

$$bc = \sigma_x\sigma_y - h - \alpha_{xy}$$

をみたす．この曲面が中心アフィン極小である条件は

$$\sigma_{xy} = 0$$

である．この曲面を射影曲面と考えるには方程式系

$$z_{xx} = (\alpha_x + \sigma_x)z_x + bz_y,$$

$$z_{yy} = cz_x + (\alpha_y + \sigma_y)z_y,$$

を考察すればよい．この系は可積分で階数が４であることがわかり，中心アフィン極小であると同時に射影的極小である条件は

$$(\alpha_x\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_{xx})c + (\alpha_y\sigma_y^2 - \sigma_y\sigma_{yy})b$$
$$+\alpha_x\sigma_x\sigma_y^2 + \alpha_y\sigma_y\sigma_x^2$$
$$-\sigma_x^2\sigma_{yy} - \sigma_y^2\sigma_{xx} = 0$$

であることを示した．典型的な部分クラスとして

$$\sigma = c_1x + c_2y + c_3,\quad c_1^2c_x + c_2^2b_y = 0.$$

となるものが得られる．
このクラスを積分して曲面を表示することは現在研究中である．

(2)余次元２の中心アフィン極小曲面の構成

余次元２の中心アフィン極小曲面の特徴付けは古畑(Bull. Belg. Math. Soc. **7** (2000)，125－134)により知られている．その性質は，この曲面を射影的に考えると，(*)の形をした方程式系の不変量のことばで述べられるはずである．実際に，曲面が双曲的であるときには，Fubini-Pick 不変量によって述べられ，そのことを使うと，与えられた非退化な曲面を動径方向に伸縮することによって，中心アフィン極小曲面が得られること，伸縮の度合いは 与えられた不変量f に対して $\lambda_{xy} = f$ の形をした方程式を解くことに帰着されることがわかった．
この定理の有用性を示すには自明でない作例が必要であるが，この研究はまだ進行中である．

(3) 一致曲面のマーカス変換
射影曲面の中に「一致曲面」と呼ばれる簡明なクラスがある．方程式系

$$z_{xx} = bz_y + (c_0 x + k_1)z,$$
$$z_{yy} = bz_x + (c_0 y + k_2)z$$

で書かれる．但し，b，c_0，k_1，k_2 はすべて定数．さらに、$c_0 = 0$ ならば，この曲面は射影極小である．一方，射影極小となる一般の方程式系(*) から新しい同じ形の射影極小となる方程式系を得るマーカス変換と呼ばれる変換がある．[S]を参照．対応する曲面の変換とも考えられる．２つの曲面は接線叢の関係にあり，かつ Weingarten 線叢と呼ばれるクラスにはいる．ここでは，一致曲面にマーカス変換を行ってまた一致曲面になるのはどういうときかを問題とする．この問題は F. Marcus (Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 65(1979), 407－424)によってすでに考察されているが，もっと正確な表示を得ることができた．近く発表する予定である．

(4) 関連する研究

・超幾何方程式系のモノドロミー群の可約性
方程式系 (*) の典型的な例に Appell の超幾何方程式系 F_2，F_3，F_4 がある．それらのモノドロミー群の算出にはいろいろな結果があるが，いつ可約であるか，そのときどういう性質を持つかの研究は Mimachi 達により進行中である．そのための準備となる Gauss の超幾何方程式, Appell の超幾何方程式系 $F1$ とその一般化である F_D のモノドロミー群がいつ可約であるかを網羅的に調べることを行った．発表論文の 1,2,3 がそれである．また，３階の一般型超幾何方程式のシュバルツ写像の研究を 発表論文 6 で行った．

・ 離散平坦曲面の構成
3 次元双曲型空間内の平坦曲面を 2 次の複素変数常微分方程式を用いて構成する方法がある．Gauss の超幾何方程式や Airy の方程式は典型例を与えることが知られている．発表論文 4 ではその方法を離散的に遂行する方法を与えた．離散的焦曲面の構成についても新しい視点と方法を与えている．
・$4\times4\times3$ 型の絶対正則なテンソルの同値性とアフィン不変量
数理統計学で絶対正則なテンソルの同値性を判定する方法が求められている．
タイプが $4\times4\times3$ の場合は，3 個の 4×4 行列 M_1，M_2，M_3 からなる組の同値問題で，多項式 $\det(xM_1+yM_2+zM_3)$ の正値性を判定することが重要である．それに (x, y, z) 空間の中のアフィン不変量の研究に帰着できる部分があり，発表論文 5 にまとめた．

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計 ６件）

(1) K. Mimachi and T. Sasaki, Monodromy representations associated with the Gauss hypergeometric function using integrals of a multivalued function, Kyushu J. of Math. 66(2012), 35－60. 査読あり
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/66/1/66_35/_pdf

(2) K. Mimachi and T. Sasaki, Irreducibili-
ty and reducibility of Lauricella’s system of differential equations E_D and the Jordan-Pochhammer differential equation E_{JP}, Kyushu J. Math. 66 (2012), 61－87. 査読あり
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/66/1/66_61/_pdf

(3)K. Mimachi and T. Sasaki, Monodromy representations associated with Appell’s hypergeometric function F1 using integrals of a multi valued function, Kyushu J. Math. 66(2012), 89－114. 査読あり
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/66/1/66_89/_pdf

(4)T. Hoffmann, W. Rossman, T. Sasaki, and M. Yoshida, Discrete flat surfaces and linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 5605－5644. 査読あり
http://www.ams.org/journals/tran/2012-364-11/S0002-9947-2012-05698-4/S0002-9947-2012-05698-4.pdf

(5) T. Sakata, K. Maehara, T. Sasaki, T. Sumi, M. Miyazaki, Y. Watanabe, and M. Tagami, Tests of inequivalence among absolutely nonsingular tensors through geometric invariants, Univ. Journal of Math. and Mathematical Sciences, Pushpa Publ. House, India, 1 (2012), 1－28. 査読あり
downloadable from
http://www.pphmj.com/abstract/6327.htm

(6)M.Kato and T. Sasaki, The hyper-geometric differential equation $_3E_2$ with cubic curves as Schwarz images, Kyushu J. Math. 65(2011), 55－74. 査読あり
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/65/1/65_1_55/_pdf

〔その他〕ホームページ
http://www.math.kobe-u.ac.jp/~sasaki

６．研究組織

(1)研究代表者
佐々木 武(SASAKI TAKESHI)
神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点
研究部・名誉教授
研究者番号: 00022682