

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月2日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540087

研究課題名（和文）

クロマティック赤方偏移とホモトピー論的代数幾何

研究課題名（英文） Chromatic redshift and homotopical algebraic geometry

研究代表者

鳥居 猛 (Torii Takeshi)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：30341407

研究成果の概要（和文）：安定ホモトピー圏の異なるクロマティック階層の間関係についてホモトピー論的代数幾何の手法を用いて研究を行った。まず異なるクロマティック階層に対応する Morava E 理論の Heck 作用素の間関係式を導いた。また D.G.Davis と共に任意の Morava K 理論に関して局所的なスペクトラムがその Morava 加群のホモトピー固定点スペクトラムとして得られることを示した。さらに可換 S 代数の Galois 拡大に対して対応する加群の圏の埋め込みに関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：I studied the relationship among the layers of the chromatic filtration in the stable homotopy category by means of homotopical algebraic geometry. I obtained the relationship between the Hecke operators on the Morava E-theories with different heights. I also showed that any spectrum which is local with respect to the Morava K-theory can be obtained as the homotopy fixed point spectrum for its Morava module in collaboration with D.G.Davis. Furthermore, I obtained results on the embeddings of the module categories for the Galois extensions of commutative S-algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：安定ホモトピー圏、クロマティック赤方偏移、ホモトピー論的代数幾何、ホモトピー固定点スペクトラム、Adams スペクトル系列、HKR 指標、Morava E 理論、Chern 指標

## 1. 研究開始当初の背景

安定ホモトピー圏には1次元可換形式群の高

さに対応する階層構造(クロマティック・フィルトレーション)が存在する。この階層構造は Johnson-Wilson 理論  $E(n)$  に関する Bousfield

局所化により実現される。また、このフィルトレーションに関する部分商は Morava K 理論  $K(n)$  に関する Bousfield 局所化と同値な極小部分三角圏になる。したがって、安定ホモトピー圏は  $K(n)$  局所化圏を基本構成単位として、それらを積み上げた構造をしていると考えられる。実際、Hopkins-Ravenel によるクロマティック収束定理により、有限スペクトラムのホモトピー型は  $E(n)$  局所化から得られるクロマティック塔と同値になることが知られている。また、Hopkins によるクロマティック分解予想は、有限スペクトラムのホモトピー型は各  $K(n)$  局所化の直積に埋め込むことができることを主張している。このことより、まず各 Morava K 理論による局所化を理解し、次に各局所化間のつながり具合を調べることがクロマティックの手法による安定ホモトピー圏の大域的構造の理解に向けた基本的な戦略といえる。クロマティック赤方偏移現象はこの各局所化間のつながり具合を反映していると考えることができ、その理解はクロマティック分解予想やクロマティック赤方偏移予想と関係し非常に重要であると考えられている。

通常の代数幾何では可換環を局所的な対象とし、それを適当な Grothendieck 位相で貼り合わせるによりスキームや代数空間、スタックなど基本的な幾何学的対象を構成する。

様々な動機から、可換環の圏の代わりにより一般的な対称モノイダル・モデル圏を基礎とする

代数幾何学の一般化が考えられている。この場合、局所対象は対称モノイダル・モデル圏

における可換モノイド対象であり、Grothendieck 位相にモデル圏のデータを加味したモデル位相を考え、それにより局所対象を貼り合わせてできる対象を幾何学的対象と考えて研究するものである。例として、単体的可換環あるいは可換  $S$  代数 ( $E_\infty$  環スペクトラム) を局所対象としたホモトピー論的代数幾何が定義され、Toen, Vezzosi, Lurie らにより理論整備が進んでいる。ホモトピー論的代数幾何の局所理論として、可換  $S$  代数のエタール拡大や Galois 理論、余接複体の理論および位相的 Andre-Quillen (コ) ホモロジー、位相的 Hochschild (コ) ホモロジーおよび位相的巡回 (コ) ホモロジーの理論などが定義された。また、大域的理論の応用として、一般楕円曲線のモジュライ・スタックの導来構造層およびその大域切断としての位相的モジュラー形式スペクトラム  $tmf$  が構成された。

## 2. 研究の目的

安定ホモトピー圏の局所的・大域的構造と数論的・代数幾何的構造との関係、特に、クロマティック赤方偏移現象について理解を深めることを研究目的とする。

球面スペクトラム  $S$  の Johnson-Wilson スペクトラム  $E(n)$  による局所化  $L_n S$  は導来スキーム  $\text{Spec}(S)$  の Zariski 開集合  $\text{Spec}(L_n S)$  を定義し、

有限スペクトラムの  $E(n)$  局所化は  $\text{Spec}(L_n S)$  上の接続層を定める。また Morava K 理論  $K(n)$  による局所化圏は  $\text{Spec}(L_n S)$  上の準接続層の圏の  $\text{Spec}(L_{\{n-1\}} S)$  上の準接続層からなる部分圏による商圏と同一視できる。これらの安定ホモトピー圏のクロマティックの観点からの概念、特にクロマティック赤方偏移現象はホモトピー論的代数幾何の立場から研究することが自然であるように思われる。

Witten による楕円種数に関する仕事に端を発して、空間  $X$  の自由ループ空間  $LX$  の幾何とクロマティック・フィルトレーションには密接な関係があると考えられている。

Bass-Dundas-Richter-Rognes により、連結  $KU$  理論の代数的  $K$  理論  $K(ku)$  は空間  $X$  上の 2 ベクトル束 (2 ベクトル空間をファイバーとするバンドル) の  $K$  群を表現している。一般に、可換  $S$  代数  $R$  の代数的  $K$  理論  $K(R)$  は空間  $X$  上の  $R$  加群をファイバーとするバンドルの  $K$  群を表現していると考えられる。 $K(ku)$  はクロマティック複雑性が 2 であり、楕円コホモロジーの一種と考えることができる。また、 $X$  上の 2 ベクトル束は自由ループ空間上のベクトル束と密接に関係している。これらは空間  $X$  のクロマティック・レベル  $n$  以下の情報と自由ループ空間のクロマティック・レベル  $(n-1)$  以下の情報との関係を示唆している。そこで  $X$  上の  $R$  加群の圏の不変量と、自由ループ空間の  $R$  コホモロジーの関係についてホモトピー論的代数幾何の手法で研究する。クロマティック・フィルトレーションと自由ループ空間の幾何との関係を調べることはクロマティック赤方偏移現象について理解するために重要であるように思われる。

## 3. 研究の方法

(1) 安定ホモトピー圏におけるクロマティック・フィルトレーションの  $n$  次以下の部分三角圏はクロマティック・レベルが  $n$  次以下のコホモロジー理論によって調べることができる。一般コホモロジーのコホモロジー作用素を理解することはその一般コホモロジーを理解するうえでもまた応用するうえでも重要である。Greenlees-May による一般化 Tate コ

ホモロジーはこのコホモロジー理論のクロマティック・レベルを1つだけ下げることが知られている。このことを動機として、Ando-Morava-Sadfskyにより、クロマティック・レベルを1つだけ下げたコホモロジー理論の乗法的自然変換として一般化Chern指標が定義された。さらにこれまでの研究により異なるクロマティック階層に対応するMorava E理論の間をつなぐChern指標の一般化を構成した。そこで異なるMorava E理論のコホモロジー作用素の間の関係について一般Chern指標を用いて研究する。

(2)  $K(n)$ 局所化圏はAdams型のスペクトル系列を通して、Morava E理論  $E_n$  とその安定化群  $G_n$  により調べることができる。このスペクトル系列の形が固定点スペクトラムの降下スペクトル系列と類似していることから、任意の  $K(n)$ 局所スペクトラムを  $G_n$  のホモトピー固定点スペクトラムで記述できるかという問題があった。この問題に対して Devinatz-Hopkins は  $K(n)$ 局所化球面の  $K(n)$ 局所  $E_n$ -Adams 分解を基に期待される性質をもつスペクトラムを構成した。しかしながら Devinatz-Hopkins の構成は本来のホモトピー固定点スペクトラムの構成法とは異なっており、固定点関手の導来関手としてのホモトピー固定点スペクトラムの構成が期待されていた。これに対して Davis は Goerss による空間におけるホモトピー固定点関手の理論をスペクトラムに拡張することにより、固定点スペクトラムの導来関手としてのホモトピー固定点スペクトラムを定義し、Morava E理論とその安定化群に対してそのホモトピー固定点スペクトラムが Devinatz-Hopkins の構成によりできるスペクトラムとホモトピー同値になることを示した。また Davis の構成法により任意の有限スペクトラムの  $K(n)$ 局所化はホモトピー固定点スペクトラムとして得られることが分かる。この Davis の構成法をさらに発展させスペクトラムの  $K(n)$ 局所化と  $K(n-1)$ 局所化の関係についてホモトピー固定点スペクトラムとしての記述を用いて研究する。

(3) Elmendorf-Kriz-Mandell-May による  $S$ 加群あるいは Hovey-Shi-pley-Smith による対称スペクトラムの理論により、(厳密に)可換な積を持つスペクトラムの圏を扱うことができるようになった。したがって球面スペクトラム  $S$  上の可換代数の圏を定義することができ、通常可換環の圏と類似の理論を展開することができる。特に Rognes は可換  $S$ 代数の Galois 理論を定式化した。可換  $S$ 代数の Galois 理論では通常可換環の Galois 理論を Eilenberg-Mac Lane 埋め込みにより含んでいる。また、複素化が誘導する位相的実  $K$

理論  $KO$  から位相的複素  $K$ 理論  $KU$  へのスペクトラム射を  $Z/2$ -Galois 拡大とみなすことができる。また Morava E理論  $E_n$  は球面スペクトラム  $S$  の  $K(n)$ 局所化上の  $K(n)$ 局所  $pro-G_n$ -Galois 拡大と考えることができるなど重要なスペクトラム射を可換  $S$ 代数の Galois 拡大とみなすことができる。そこで可換  $S$ 代数の  $G$ -Galois 拡大  $B/A$  に対して  $A$ 加群の圏と  $G$ 作用付きの  $B$ 加群の圏の関係についてホモトピー論的代数幾何の手法を用いて研究する。

#### 4. 研究成果

(1) 異なるクロマティックレベルに対応するMorava E理論の間の関係について理解するためにMorava E理論の非安定作用素と一般化Chern指標、 $p$ -divisible群の部分群束との関係について考察し、異なるクロマティックレベルに対応するMorava E理論の間のHecke作用素について成り立つ関係式を得た。

(2) D. G. Davis と共同で  $K(n)$ 局所化圏およびMorava E理論とその安定化群  $G_n$  のホモトピー固定点スペクトラムについて考察し、任意の  $K(n)$ 局所スペクトラムを  $G_n$  のホモトピー固定点スペクトラムとして記述できることを示した。

(3) 可換  $S$ 代数の  $E$ 局所  $pro-G$ -Galois 拡大  $B/A$  に対して、 $A$ 加群の圏から離散  $G$ 作用付き  $B$ 加群の圏への自然な関手について考察し、この関手が埋め込みになるための十分条件を得た。このことから  $K(n)$ 局所化圏が離散  $G_n$  スペクトラムの圏における  $K(n)$ 局所  $E_n$ 加群のなす部分圏に埋め込むことができることを示した。

(4) Hopkins-Kuhn-Ravenel による一般化指標の理論により有限群  $G$  の分類空間のMorava E理論はねじれ元を除いて  $G$  から形式群の普遍変形空間の関数環への多重指標で記述される。そこで HKR 指標と一般Chern指標の関係について考察し、Morava E理論に付随する  $p$ -divisible群の幾何をもちいて一般化Chern指標のHKR指標による記述を得た。

(5)  $K(n)$ 局所スペクトラムを調べる基本的な手段は  $K(n)$ 局所  $E_n$ -Adams スペクトル系列を用いるものである。そこで  $K(n+1)$ 局所  $E_{n+1}$ -Adams スペクトル系列の  $K(n)$ 局所化について考察し、その  $E_2$ 項を連続コホモロジーとして記述した。

(6) 異なるクロマティック・レベルのMorava E理論をつなぐ一般化Chern指標について、その可換  $S$ 代数の射としての記述を得た。

(7) 中本和典氏と共同で自由モノイドの Borel 型の表現のモジュライ空間のトポロジーについて研究した。まず表現の次数に対して自由モノイドの階数が小さい非安定な場合に具体的な計算を行った。また Borel 型の表現のモジュライ空間の有理ホモトピー型について混合 Hodge 構造まで込めて決定した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

□ Nakamoto Kazunori and Torii Takeshi, Rational homotopy type of the moduli of representations with Borel mold, Forum Math. 24 (2012), no. 3, 507-538. 査読有

□ Daniel G Davis and Torii Takeshi, Every  $K(n)$ -local spectrum is the homotopy fixed points of its Morava module, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 3, 1097-1103. 査読有

□ Nakamoto Kazunori and Torii Takeshi, Topology of the representation varieties with Borel mold for unstable cases, J. Aust. Math. Soc. 91 (2011), no. 1, 55-87. 査読有

□ Torii Takeshi,  $K(n)$ -localization of the  $K(n+1)$ -local  $E_{n+1}$ -Adams spectral sequences, Pacific J. Math. 250 (2011), no. 2, 439-471. 査読有

□ Torii Takeshi, Comparison of Morava E-theories, Math. Z. 266 (2010), no. 4, 933-951. 査読有

□ Torii Takeshi, On  $E_\infty$ -structure of the generalized Chern character, Bull. Lond. Math. Soc. 42 (2010), no. 4, 680-690. 査読有

□ Torii Takeshi, HKR characters,  $p$ -divisible groups and the generalized Chern character, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 11, 6159-6181. 査読有

[学会発表] (計 6 件)

□ Torii Takeshi, On  $K(1)$ -local topological modular forms, SGAD2012 Geometrical perspective of topological modular forms, 東京大学, 2012 年 11 月 15 日

□ 鳥居 猛, 可換 S 代数の Galois 拡大と加群の圏の埋め込みについて, ホモトピー論シンポジウム, 山口大学, 2012 年 11 月 3 日

□ 鳥居 猛, Descent for structured modules, (非)可換代数とトポロジー, 信州大学, 2012 年 3 月 14 日-16 日

□ Torii Takeshi, Power operations and the generalized Chern character, 第 4 回東アジア代数的トポロジー国際会議 (EACAT4), 東京大学, 2011 年 12 月 9 日

□ Torii Takeshi, Power operations and the generalized Chern character, Structured Ring Spectra, Universitat Hamburg, Germany, 2011 年 8 月 2 日

□ Torii Takeshi, On the  $K(n)$ -local category, 低次元トポロジーと数論 III, 九州大学西新プラザ, 2011 年 3 月 17 日

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

鳥居 猛 (Torii Takeshi)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授  
研究者番号: 30341407

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: