

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 7 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540088

研究課題名（和文） 双曲的結び目の例外的デーْن手術に関する研究

研究課題名（英文） Exceptional Dehn surgeries on hyperbolic knots

研究代表者

寺垣内 政一 (TERAGAITO MASAKAZU)

広島大学・大学院教育学研究科・教授

研究者番号：80236984

研究成果の概要（和文）：3次元多様体の基本群がいつ左不変順序を許容するか、近年、関心が高まっている。特に、L空間とよばれる3次元多様体のクラスがそのような順序構造を許容しない3次元多様体のクラスと一致するのではないかという予想が提出されている。本研究では、この予想を念頭において、2橋結び目を対象に、デーْن手術で得られる多様体の基本群が左不変順序を許容するような手術の係数の範囲や値を与えることに成功した。

研究成果の概要（英文）：Recently, there has been a lot of interest in the problem when the fundamental groups of 3-manifolds admit left-orderings. In particular, there is a conjecture that the class of irreducible L-spaces coincides with the class of 3-manifolds whose fundamental groups admit no left-orderings. In this research, we examined the resulting 3-manifolds by Dehn surgery on 2-bridge knots, and obtained several values and ranges of surgery slopes giving left-orderable fundamental groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学，結び目，3次元多様体，デーْن手術

1. 研究開始当初の背景

結び目理論・3次元多様体論において、デーْن手術の研究は著しく発展してきた。双曲的結び目に対して、非双曲的3次元多様体を生じる例外的デーْن手術は、生じる3次元多様体のクラスにしたがって、4種類に分類される：レンズ手術、ザイフェルト手術、トロイダル手術、可約手術。デーْن手術研究の中心課題は、これら例外的デーْن手術の分析で

あった。たとえば、21世紀に入ってから、ヘガード・フロアー・ホモロジー理論の導入によって、レンズ手術に関して著しい発展があった。しかし、レンズ手術を許容する結び目の完全分類は未解決のままであった。ザイフェルト手術に関しては、宮崎・茂手木によってザイフェルター理論が導入され、ザイフェルト手術全体をネットワークとしてとらえるという画期的な視点がもたらされた。トロイダル手術については、研究代表者が重点

的に取り組んできた課題であり、双曲的結び目の許容するトロイダル手術の個数や、生じる多様体に含まれる本質的トーラスの枚数や性質について、成果を蓄積しつつあった。最後に、可約手術については、いわゆるケプラー予想という最終課題は手つかずの状況であったが、生じる多様体のもつレンズ空間因子の基本群の位数について、結び目の橋指数による上界が発見された。(なお、研究成果の概要で言及している3次元多様体の基本群が許容する左不変順序とL空間との関係をのべたL空間予想は、2011年7月に、研究代表者が出席したメルボルンでの国際会議の席上で正式に提出され、直後にプレプリントがネット上に投稿されたものである。)

2. 研究の目的

研究代表者は、ザイフェルト手術とトロイダル手術を中心に成果を蓄積してきた。研究開始当初は、4種類の例外的手術に関して、これまでの研究をさらに発展させることを目的としていた。

3. 研究の方法

研究代表者が主たる研究の推進を行った。下記に記述する1つめの成果については、デーネン手術を主たる研究課題とする茂手木公彦氏(日本大学)、市原一裕氏(日本大学)を東京にたずね、意見交換をおこなった。2つめの成果については、不変順序を専門とし、代数学に強いケベック大学のアダム・クレイ氏に電子メールによって助言を求めた。また、国内でただ一人、不変順序の研究に取り組んでいた東京大学大学院生の伊藤哲也氏とも電子メールによる意見交換を行った。

4. 研究成果

3年間の主な成果を項目ごとにまとめる。

(1) 3次元球面内の非自明な結び目に対して、非自明なデーネン手術を行うと、3次元球面に戻ることはない。しかし、境界のある比較的単純な多様体であるソリッドトーラスの場合、結び目で非自明なデーネン手術を行ってソリッドトーラスに戻る現象が知られていた。さらに、そのようなデーネン手術を許容するソリッドトーラス内の結び目は、ガバイとバーギによってすべて決定されている。特に、各結び目に対してそのような手術は高々2つしかなく、ちょうど2つ許容する結び目はただ1つしかないことが、バーギによって示されていた。

一般に、3次元多様体内の結び目で非自明なデーネン手術を行って、元の多様体と向きは反転するが同相な多様体を得ることがある。

このようなデーネン手術はコスメティック手術とよばれ、閉じた3次元多様体においては極めてまれな現象である。

本研究の成果として、境界のある多様体として最も基本的であるハンドル体に対して、コスメティック手術を許容する双曲的結び目の構成を行った。ハンドル体とは、ソリッドトーラスで始まる3次元多様体の無限系列であり、ソリッドトーラスに対する上述の結果の自然な拡張とみなせる。

ハンドル体内の結び目に対して、境界と結び目の近傍をつなぐアニュラスがない場合、境界圧縮非自明手術は高々2個しか存在しないことが知られていた。種数2のハンドル体に対して、ガバイがそのような手術を1つもつ例を与えていたが、モンテシノス・トリックを使って、その例がもうひとつ境界圧縮手術をもつことを示した。さらに、ガバイの結び目を無限列に拡張した。これらはいずれも結び目の外部に分離的本質アニュラスを含んでおり、結び目の外部が全測地的境界をもつ双曲的多様体にはなっていない。そこで、種数2の場合にそのような双曲的結び目であって、しかもコスメティック手術を2個許容するものを構成した。モンテシノス・トリックを使用している点で、コスメティック手術のメカニズムが明らかである。また、同様の構成を種数が3以上の場合に拡張したが、分離的本質アニュラスの排除が課題として残っている。

なお、本成果は2011年1月、広島大学で開催された第7回 East Asian School of Knots and Related Topicsにおける招待講演として発表を行った。

(2) 近年、どのような3次元多様体の基本群が左不変順序を許容するかという問題に注目が集まっている。群論において、不変順序の研究の歴史は長い。群に対して、左からの群演算に対して保存されるような全順序を左不変順序とよぶ。左不変順序の存在と右不変順序の存在は同値であり、いずれを使用しても構わない。

トポロジーによくあらわれる無限群には、左不変順序を許容するものがたくさんある。自由群、自由アーベル群、射影平面以外の曲面の基本群などがあげられる。特に、結び目理論との関連でいえば、結び目の補空間の基本群であるいわゆる結び目群、さらに絡み目群はすべて左不変順序を許容することが80年代には知られていた。90年代に入って、デオノワが組紐群に左不変順序が存在することを示したことで、低次元多様体論・結び目理論研究者の注目を集めることとなったといえるだろう。以降、不変順序とトポロジーとの関連が徐々に明らかになりつつある。中で

も、2011年7月、ヘガード・フロアー・ホモロジー理論において導入されたL空間とよばれる重要な3次元多様体の族が、基本群に左不変順序を許容しないという性質で特徴づけられるのではないかという、いわゆるL空間予想がボイヤー、ゴードン、ワトソンらによって提案されたことで、世界中の多くの研究者がこの話題に取り組み始めた。

以前から、ヘガード・フロアー・ホモロジーに言及しないL空間の位相的特徴づけは懸案問題であり、L空間予想の肯定的解決は位相的解釈を与えるものではないが、代数的解釈といえるだろう。3次元多様体の基本群の順序構造とフロアー・ホモロジーとの関連は見出されておらず、予想が正しければ未知の領域への扉が開くことにもなり、今後の発展が大いに期待される。

1次元ホモロジー群が無限群であるような既約3次元多様体の基本群は、左不変順序を許容することがボイヤー、ロルセンらによって示されているため、1次元ホモロジー群が有限群であるようないわゆる有理ホモロジー球面が研究対象として残されている。そのような有理ホモロジー球面は、3次元球面内の結び目のデー手術によって簡単にしかも大量に生成できる。一方、結び目のデー手術によってL空間を生じることがある場合、その結び目はファイバー型でなければならないなど、いくつかの強い制約をもつことが知られている。したがって、それらの制約条件を通過できない結び目を選んで、デー手術を行えば、L空間でない有理ホモロジー球面を生成することが容易にできる。L空間予想を支持するならば、そのような多様体の基本群が左不変順序を許容することが期待される。

この方向に対して、まずボイヤー、ゴードン、ワトソンらが最も簡単な双曲的結び目である8の字結び目に対して、デー手術の係数が-4から4の間にある場合、得られる多様体の基本群が左不変順序を許容することを示した。直後に、手法は異なるのだが、クレイとワトソンが、同じ8の字結び目に対して-4及び4という手術係数でも同じ結果が得られることを示した。

本研究では、クレイとワトソンの手法を拡張して、双曲的ツイスト結び目に対して手術係数4が左不変順序を許容する基本群をもつ多様体を生じることが示した。双曲的ツイスト結び目は8の字結び目を含む無限系列である。クレイとワトソンが示したように、8の字結び目に対する手術係数4の場合、得られる多様体の幾何構造が比較的単純である。本質的トーラスが1枚しか入らず、いわゆるト

ーラス分解のピースは2つのザイフェルト多様体のみであった。それぞれのピースの基本群に入る左不変順序を適切に張り合わせることで、全体の多様体の基本群に対する左不変順序を構成するという流れである。双曲的ツイスト結び目に対象を広げても、トーラス分解のピースは同じく2つのザイフェルト多様体であり、しかもそれぞれのピースの基本群に対する左不変順序の構成が近年得られていたことが幸いして、研究成果につながった。

なお、この研究成果は論文にまとめ、国際学術雑誌に投稿し、すでに掲載が決まっている。

(3) ツイスト結び目に対して行った(2)の研究をさらに発展させて、代表的な双曲的結び目である2橋結び目に対して、その例外的デー手術によって生じる多様体の基本群が左不変順序を許容することを確認した。この場合、生じる多様体のトーラス分解には3つのピースがあるため、各ピースの許容する左不変順序の張り合わせ作業に困難さがあった。(2)の成果とともに、L空間予想の信憑性を高める新たな証拠である。この成果は論文にまとめ、国際学術雑誌に投稿し、すでに掲載が決定している。

(4) ツイスト結び目を含む種数1の双曲的2橋結び目に対して、手術の係数がある区間に属する場合、生じる多様体の基本群が左不変順序を許容することを証明した。これは、ボイヤーたちによって行われた8の字結び目の場合の結果を大幅に一般化したものであり、L空間予想の信憑性を高めるさらなる証拠である。ボイヤーたちの議論と同じく、結び目群から2次の実特殊線型群への表現を用いるのだが、議論の要となる場所で表現空間の理論を用いるボイヤーらと違い、行列の計算に基づく初等的な手法を用いている点が大きなアピールポイントである。

この成果は論文にまとめ、すでに国際学術雑誌に投稿し、現在、審査中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

1. Adam Clay and Masakazu Teragaito, Left-orderability and exceptional Dehn surgery on two-bridge knots, Contemporary Mathematics Series, 査読有, 印刷中
2. Masakazu Teragaito, Left-orderability and exceptional Dehn surgery on twist

knots, Canadian Mathematical Bulletin,
査読有, 印刷中

[学会発表] (計4件)

1. 寺垣内 政一, ツイスト結び目のデー
ン手術と左不変順序, 日本数学会年会, 2013年
3月20日, 京都大学

2. 寺垣内 政一, Left-orderable
fundamental group and Dehn surgery on
twist knots, The 9th East Asian School of
Knots and Related Topics, 2013年1月15
日, 東京大学

3. 寺垣内 政一, 2橋結び目の例外的デー
ン手術と左不変順序, 日本数学会年会, 2012
年3月26日, 東京理科大学

4. 寺垣内 政一, Boundary reducing knots
in handlebodies, The 7th East Asian School
of Knots and Related Topics, 2011年1月
10日, 広島大学

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺垣内 政一 (TERAGAITO MASAKAZU)
広島大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号: 80236984

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

合田 洋 (GODA HIROSHI)
東京農工大学・大学院共生科学技術研究
科・教授
研究者番号: 60266913