

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 23 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540091

研究課題名(和文) ロボット運動の位相的複雑さの研究

研究課題名(英文) Research on the topological complexity of robot motion planning

研究代表者

神山 靖彦 (KAMIYAMA, YASUHIKO)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10244287

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：与えられたロボットの姿勢をどの程度連続的に変えることができるかを有効に記述する幾何学的量として位相的複雑さがある。有名なロボットの両輪として多角形のモジュライ空間とクモの巣装置があるが、これらのロボットを含む統一的なロボットを構成し、その上の関数を調べた。この関数はボット・モース関数という非常にいい関数であることを解明し、既知の諸定理を統一する結果を得た。モース関数の臨界点と位相的複雑さには相互関係があるので、位相的複雑さの情報が得られたことになる。

研究成果の概要(英文)：As a topological invariant which describes motion planning of a robot effectively, we study the topological complexity. The moduli space of polygons and arachnoid mechanism are typical examples of robots. We constructed a robot which unifies these robots. Then we defined a function on it. Our main theorems assert that the function is a Bott-Morse function. Using the Bott-Morse theory, we obtained results from which the known results follow immediately, for example, the Euler characteristic formula. Since there are close connections between the critical points of a Morse function and the topological complexity, we can deduce fruitful information on the topological complexity of the new robot.

研究分野：数物系科学

キーワード：ロボット運動 配置空間 位相的複雑さ 多角形のモジュライ空間 クモの巣装置 モーメント角複体
ボット・モース関数 パーフェクト関数

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年トポロジーにおいて、L-S カテゴリー(Lusternik-Schirelmann category) が再認識されている。これは多様体上の関数の臨界点の個数をしたから評価するものであり、次のように定義される: 位相空間 X の L-S カテゴリー (以下 $\text{cat}(X)$ と表す) が m であるとは、 X がその中で可縮な m 個の開集合で覆われ、かつ $m-1$ 個では覆われない場合をいう。ホモトピー不変で不変な量をホモトピー不変量といい、トポロジーにおける主題はホモトピー不変量を研究することである。 $\text{cat}(X)$ はホモトピー不変量であり自然数に値をとるので非常に簡潔である。それに加えて、空間 X の特徴をよく反映することが知られている。しかしながら、与えられた空間 X に対して $\text{cat}(X)$ を計算することは、 X がよく知られた等質空間であっても非常に難しい。

Ganea は 1971 年に $\text{cat}(X \times S^n) = \text{cat}(X) + 1$ であろうと予想したが、これも未解決であった。量 $\text{cat}(X)$ には有効な研究手段が確立されないまま時間が過ぎたのであるが、1998 年に岩瀬則夫氏が Ganea 予想の反例を発見した。これを契機に L-S カテゴリーの研究が再認識されるようになった。ホモトピー論の問題としては、具体的な等質空間の L-S カテゴリーの計算が盛んに行われている。そのために新たな一般コホモロジーを用意するなど、代数的位相幾何の最近の発展が反映されている。一方、微分位相幾何の問題としては、多様体上の葉層構造の研究において L-S カテゴリーが活用されている。

(2) 以上のように L-S カテゴリーは最近のトポロジーにおいて重要であるが、一方で Farber は 2003 年に位相的複雑さという量を定義した。これは与えられたロボットを連続的に動かして様々な姿勢をとらせるとき、運動が不連続になってしまう点ほどの位あるかを計る量である。一つのロボットの取りうる姿勢全体を配置空間と呼び、 X で表す。 X の位相的複雑さを $\text{TC}(X)$ で表す。 $\text{cat}(X)$ と同様、 $\text{TC}(X)$ もホモトピー不変量であり自然数に値をとるので非常に簡潔である。それに加えて、ロボット運動の連続性を的確に捉える重要な量であることも知られている。

上では $\text{TC}(X)$ を考える X はロボット運動の配置空間に限定されているように見えるが、それは $\text{TC}(X)$ を考える動機を説明するためにそうただけで、実際には $\text{TC}(X)$ は任意の位相空間 X に対して定義される。しかも $\text{TC}(X)$ は $\text{cat}(X)$ と非常に近い概念である。その証拠として、 $\text{cat}(X)$ も $\text{TC}(X)$ も然るべきファイブレーションの Schwarz 種数という解釈が与えられるからである。

しかしながら、 $\text{TC}(X)$ の計算は $\text{cat}(X)$ の計算よりはるかに難しい。現在 $\text{TC}(X)$ が盛んに研究されている空間 X は (下からの評価を上げるために Massey 積が計算できるといった) 人為的な空間が多く、位相的複雑さの本

来の目的であるロボット運動の配置空間を考えることは皆無であった。

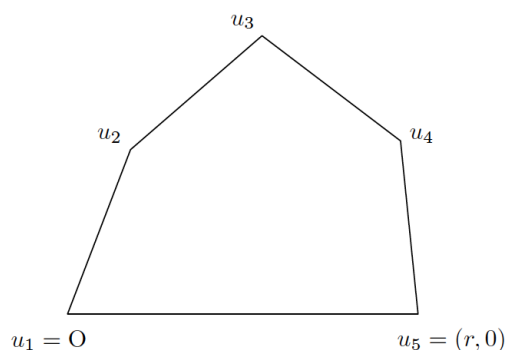
2. 研究の目的

本研究の目的は、 X としてロボット運動の配置空間を考えたとときの $\text{TC}(X)$ について研究を行うことである。近年、特に盛んに研究されているロボットとして、多角形のモジュライ空間とクモの巣装置がある。これらのロボットの特徴は以下で述べるが、本研究の主目的は、 X としてこれらのロボットをとったときの $\text{TC}(X)$ の研究である。

さて、これらのロボットの特徴について述べる。

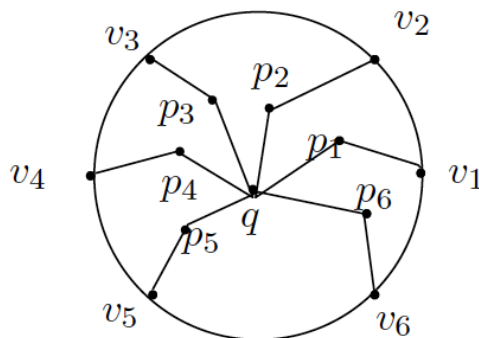
(1) 多角形のモジュライ空間は 1990 年代から世界中で非常に活発に研究されてきた。組合せ論的に興味深い対象であるのみならず、シンプレクティック多様体といういい構造を持っているからである。つまり多角形のモジュライ空間は、組合せ論、代数トポロジー、トーリクトポロジーといった種々の数学における典型的な例になっているのである。

下図は 5 角形の一例を表している。



(2) クモの巣装置とは、パワーショベルの腕を幾つか用意し、腕の一端は多面体の頂点に固定し、もう一端は一斉に接合することにより得られるロボットである。

下図は 6 本のパワーショベルの状況を表している。



上の(1)では、多角形のモジュライ空間がト

ーリクトポロジーやシンプレクティック幾何の典型的な例であると述べたが、実はクモの巣装置もトーリクトポロジーと密接に関連する。実際、トーリクトポロジーの研究において、モーメント角複体は中心的役割を果たしている。クモの巣装置の配置空間はモーメント角複体と解釈できることが知られている。

更にホモトピー論の方面では、モーメント角複体を1回懸垂すると球面のブーケに分解するという興味深い性質がある。(この事実は重要である。というのは、超平面配置における Goresky-MacPherson によるホモロジー分解定理の一般化と解釈されるからである。実際、モーメント角複体はある種の超平面配置の補空間となり、ホモロジー分解が空間レベルでの分解に一般化されたことになる。) その意味からもクモの巣装置は数あるロボットのうちでも最重要な一つである。

3. 研究の方法

本課題は以下の3つの方法で研究を行った。

(1) 個人で行う研究。手計算の他にコンピュータ計算も含む。

(2) 国際会議に出席し、参加者との研究打ち合わせを行う。

(3) Rochester 大学の Cohen 教授から論文のレビューを受ける。

以下でそれぞれについて概説する。

(1) 主な発表論文等の所にあるように、申請者は本研究期間内に18本の論文を出版してきた。その中には、コンピュータを駆使した仕事も含まれる。例えば、研究論文⑤、⑨、⑩はクモの巣装置を有限群で割ったときの商空間のホモロジーを決定したのだが、手計算で進めた段階では計算が複雑で苦慮した。コンピュータにより具体例を計算した結果、正解の予想ができ、最終的に手計算での証明に成功した。

(2) 2010年11月に Canada の Banff 市で “Topological Methods in Toric Geometry, Symplectic Geometry and Combinatorics” という国際会議が開催された。これは主催者が研究者の業績を審査し、選ばれた人だけに招待状が送られるものであった。

この研究集会に招待され、有意義な意見交換ができた。Anderson 氏と Puppe 氏の講演の座長も務めた。

招待された研究者のリストの URL

<https://www.birs.ca/events/2010/5-day-workshops/10w5026/participants>

(3) Rochester 大学の Cohen 教授とは20年来の知り合いで、多くの有意義なコメントをもらってきた。現在も頻りにメールで連絡を取っている。Cohen 教授の功績を称え、

2005年に東京大学で COE 国際会議 “Groups, Homotopy and Configuration spaces” が開催された。この折には主要講演 (Plenary Talk) を行った。

会議の URL

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/GHC/>

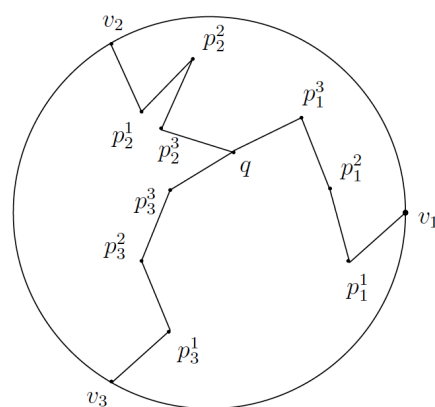
4. 研究成果

研究成果は次の5つに大別される。

(1) 多角形のモジュライ空間とクモの巣装置を含むような統一したロボットを構成し、その上のボット・モース関数を研究したこと。(論文①、④)。

研究の目的の(2)でクモの巣装置について紹介したが、ここでいうパワーショベルとは2本の棒を1つの関節で接合したものである。より一般に、 m 本の棒を $(m-1)$ 個の関節で接合したパワーショベルを考え、 n 角形の頂点ごとに接合したロボットを構成した。特に、 $n=2$ の場合が $(2m+1)$ 角形のモジュライ空間で、 $m=2$ の場合がクモの巣装置である。

下図は $n=3, m=4$ の状況を表している。



論文①では、このロボット上にボット・モース関数を構成し、モース理論を展開した。既知の諸定理が、この研究結果から導かれることとなり、非常に見通しのいい理論ができた。

一般に位相的複雑さは上からの評価と下からの評価により決定され、それぞれ手法が異なる。下からの評価は代数的手法により得られる。与えられた環におけるある元の高さとは、その元を何乗すれば初めて0になるかという数のことである。論文④ではコホモロジー環におけるある元の高さを決定した。引用文献にあげたように、Hiller はグラスマン多様体における第一スティーフエル・ホイットニー類の高さを決定した。論文④はこの仕事のロボット版である。

(2) クモの巣装置に有限群を作用させ、その商空間のホモロジー群を決定したこと。(論文⑤、⑨、⑩、⑪、⑬)。円順列に有限群を作用させ、商集合が幾つの元からなるかを調べることは、DNA 配置の問題などの観点から

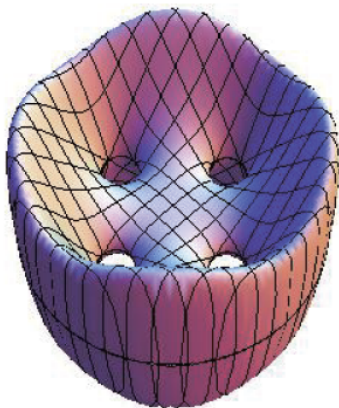
も興味深い。

有限群の円順列への作用は自然にクモの巢装置への作用を導くので、商空間が定義される。このホモロジーを決定したいのだが、トーション部分群の決定が複雑であった。5種類の有限群作用があり、コンピュータによる実験例に手計算で証明をつけるという方法により、⑨、⑩で2種類ずつ解決した。残り1種類はコンピュータ実験のデータからも規則が読み取れず苦勞したが、⑤で解決することができた。

(3) 本研究課題である位相的複雑さは、多様体上のモース関数と密接に関係する。そのモース関数が精密であればあるほど、位相的複雑さについてもより精密な結果が得られる。一般に与えられた多様体上のモース関数のうち、最も効率のよいセル分割を与えるものをパーフェクトなモース関数という。しかしパーフェクトなモース関数を実際に構成することは非常に困難で、知られている多様体の例は多くない。多角形のモジュライ空間上にパーフェクトなモース関数を構成することに成功した。(論文⑬、⑭)。

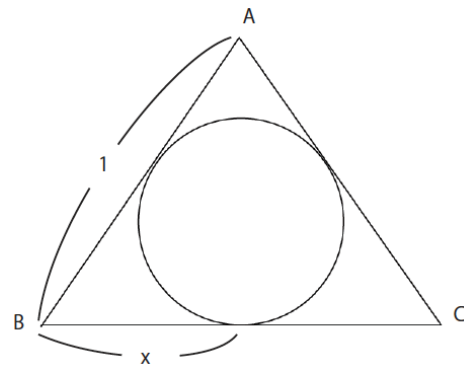
(4) コンピュータを使った計算機数学。(論文②、③、⑫、⑬)。(論文②、③、⑫、⑬)。微分幾何学で最も美しいと言われるガウス・ボンネの定理を考える。これは閉曲面のガウス曲率の積分が、オイラー標数と一致するという主張である。しかし、ガウス曲率を実際に計算することは難しく、球面とトーラス以外は未知であった。⑬では、種数が小さい閉曲面に対して、ガウス曲率を直接計算できた。そのために、閉曲面の定義方程式を明示したが、この記述は興味深いとMathSciNetでも評価された。

下図はこの方程式で与えられる種数4の向き付可能閉曲面を表している。



その他、論文②、③では正多角錐に内接する球面の最大値問題。この問題を考えた動機は、次の平面幾何の問題である。「斜辺の長さが1、底辺の長さが $2x$ の二等辺三角形を考える。 X を動かすとき、内接円の半径が最大になる x を決定せよ。」この問題の答は興味深く、黄金比の逆数である。

下図は、この平面幾何の問題を表している。



論文②、③ではこの問題を1次元上げた状況を研究したのである。

また、⑫では角数が6以下の場合に多角形のモジュライ空間のリーマン体積を、コンピュータを駆使することにより計算した。

(5) 論文⑮では、 S^4 上のインスタントンのモジュライ空間がスピン構造を持つかを決定した。これは長年未解決であった問題の解決である。考察の過程で得られた結果はホモトピー論の研究者達の計算に利用され、⑮が引用されている。

<引用文献>

① H. Hiller, On the cohomology of real Grassmannians, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 257, No. 2, 1980, 521-533

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 18 件)

① 神山靖彦、The Euler characteristic of the configuration space of planar spidery linkages、Algebraic and Geometric Topology、査読有、Vol. 14, No. 6, 2014, 3659-3688
DOI: 10.2140/agt.2014.14.3659

② 神山靖彦、Which inscribed sphere of pyramids is maximal?、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 27, 2014, 1-8
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>

③ 神山靖彦、An extremal value problem concerning the inscribed sphere of pyramids、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 27, 2014, 9-17
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>

- ④ 神山靖彦、The height of a class in the cohomology ring of polygon spaces、International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences、査読有、Article ID 305926、2013、1-7
オープンアクセスの URL
<http://dx.doi.org/10.1155/2013/305926>
- ⑤ 神山靖彦、The real moment-angle complex of a polygon and necklace sequences、Surveys in Mathematics and Mathematical Sciences、査読有、Vol. 3、No.2、2013、77-95
- ⑥ 神山靖彦、Remarks on the homology of a regular 2-cover、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 26、2013、1-13
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>
- ⑦ 神山靖彦、An exotic involution of the moduli space of planar polygons、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 26、2013、15-35
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>
- ⑧ 神山靖彦、The mapping degree of a diffeomorphism between polygon spaces、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 26、2013、36-60
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>
- ⑨ 神山靖彦、Homology of the orbit space of a closed orientable surface under the action of the dihedral group、Advances and Applications in Discrete Mathematics、査読有、Vol. 10、No.2、2012、109-119
- ⑩ 神山靖彦、Homology of the orbit space of a closed orientable surface under the action of $Z_n \times Z_2$ 、Advances and Applications in Discrete Mathematics、査読有、Vol. 10、No.2、2012、121-134
- ⑪ 神山靖彦、Applications of the Lefschetz fixed point formula to closed orientable surfaces with finite group actions、JP Journal of Geometry and Topology、査読有、Vol. 12、No.3、2012、303-317
- ⑫ 神山靖彦、The Riemannian volume of the moduli space of planar quasi-equilateral polygons with vertex

number 4, 5 or 6、Ryukyu Mathematical Journal、査読無、Vol. 25、2012、1-19
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>

- ⑬ 神山靖彦、The rational homology of planar polygons modulo isometry group、JP Journal of Geometry and Topology、査読有、Vol. 11、No. 1、2011、53-63
- ⑭ 神山靖彦、Computer-aided verification of the Gauss-Bonnet formula for closed surfaces、査読無、Vol. 26、2011、1-18
琉球大学学術リポジトリ
<http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/59?lang=ja>
- ⑮ 神山靖彦、Spin structures on instanton moduli spaces、Topology and its Applications、査読有、Vol. 157、No.1、2010、35-43
- ⑯ 神山靖彦、Homology of the universal covering of planar polygon spaces、JP Journal of Geometry and Topology、査読有、Vol. 10、No. 2、2010、171-181
- ⑰ 神山靖彦、A perfect Morse function on planar polygon spaces、Journal of Mathematical Sciences. Advances and Applications、査読有、Vol. 6、No.1、2010、125-136
- ⑱ 神山靖彦、A perfect Morse function on planar polygon space modulo isometry group、Advances and Applications in Discrete Mathematics、査読有、Vol. 6、No.1、2010、55-75

〔その他〕
ホームページ等
https://www.researchgate.net/profile/Yasuhiko_Kamiyama

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
神山 靖彦 (KAMIYAMA, YASUHIKO)
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：10244287