

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540095

研究課題名(和文)非可換幾何・特異点・幾何学的漸近解析学の研究

研究課題名(英文)Research of non-commutative geometry, singular point, and geometric asymptotics

研究代表者

宮崎 直哉 (MIYAZAKI, Naoya)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：50315826

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：4つのことについて研究を行った。一つ目はスキームの構造層のポアソン構造方向への非可換化の定義を与え、複素射影空間を用いて具体例を構成し、新たな積について指数写像を計算した。二つ目は大森英樹氏、前田吉昭氏、吉岡朗氏らとの共同で平坦な空間における量子化のオーダーリング問題について考察し、またパラメータ h について収束するスター積について考察を行った。三つ目は本間泰史氏、楯辰哉氏との共同で3次元多様体(ハイゼンベルグやレンズ空間など)におけるディラック作用素から定義されるエータ関数の性質を調べた。四つ目は谷口正氏との共同で、スーパーポアソン構造を付ツイスターについてその量子化について考察を行った。

研究成果の概要(英文)：First, I introduced non-commutative deformation of structure sheaves of schemes, and I constructed a concrete example via complex projective spaces. Furthermore, I computed exponential map with respect to a new product. Second, with Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Akira Yoshioka, we studied the ordering problem on a flat space, and convergent problem with respect to a parameter h . Third, with Yasushi Homma, Tatsuya Tate, we study eta functions for Dirac operators on 3-manifolds (e.g. Heisenberg manifold, Lenz spaces etc.). Fourth, with Tadashi Taniguchi, we study quantization of super Calabi-Yau twistor spaces endowed with super Poisson structure via Penrose double fibration.

研究分野：幾何学

キーワード：非可換幾何学 シンプレクティック幾何学 一般複素幾何学 量子化 指数定理 フーリエ積分作用素

1. 研究開始当初の背景:

シンプレクティック多様体についてその(変形)量子化の考察が行われ始め、前世紀の終わりころまでに Fedosov, Omori-Maeda-Yoshioka, Nest-Tsygan, Deligne, Omori-Maeda-Yoshioka-Miyazaki らにより(変形)量子化の構成ならびに分類がなされ、今世紀初頭(arXiv: プレプリントのレベルでは前世紀終わりころ)には、ついに Kontsevich によりシンプレクティック多様体を含むより一般のポアソン構造についてその(変形)量子化が可能であることが示された。それらの議論は本質的にはプランク定数 \hbar をフォーマルパラメータとして捉え、係数となる関数環は滑らかなカテゴリーで議論するというものであった。そのような研究のなされる一方、古典的なシンプレクティック構造、ポアソン構造、複素構造を包括的に含む概念である一般複素構造と呼ばれる概念(幾何構造)が導入された。それはクーランアルジェブroidと呼ばれる枠組みの中で確立された幾何学的対象で、その量子化も興味深い研究対象であることがわかる。古典的な複素構造の幾何学的変形理論に倣い、一般複素構造においてその幾何学的変形が後藤竜司氏により詳細に研究され、小平・スペンサー理論の拡張がなされているなかで、それらの量子化を統一的に扱う枠組みの模索が始まりつつあった(今現在も進行中である)。また量子化に際しては、対称代数(多項式代数)のポアソン方向への量子化としてワイル代数が現れるのと同様に、グラスマン代数の計量方向への量子化であるクリフォード代数やそこから自然に導入されるディラック作用素についても非常に大切な考察の対象となる。先にも述べたが量子化に関連して3次元多様体に付随して出現するディラック作用素とそれにより定義されるエータ関数についてその直接的解析が興味ある話題であった。特にエータ関数が固有値に関する正負の

対称性からのずれを測っていることを考えるとその重要性は感じ取ることが出来る。

2. 研究の目的

(1) 一般複素構造に関連してその量子化を行うこと。それにより、従来からあるシンプレクティック構造、やポアソン構造方向への量子化は統一的に取り扱われ、さらにケーラー構造のように複素構造とシンプレクティック構造がコンパティビリティを持ちながら融合されている構造も取り扱えるようになることが望ましい。

(2) ディラック作用素から得られるエータ関数についてその解析的性質をしらべること。とくに3次元多様体の場合に研究を行うこと。

3. 研究の方法

(1) 研究の目的の(1)については今まで行ってきた滑らかなカテゴリーでの量子化の手法を援用しつつ、ケーラー多様体の族を族として量子化する。あわせて、代数多様体の量子化の定義をおこないそれに沿った量子化の例を構成する。

(2) ディラック作用素の解析的研究は数多くなされてきている。ここでは微分積分学や解析関数論などに現れる初等的方法を駆使してディラック・エータ関数の解析を行う。

4. 研究成果

(1) 大森英樹・前田吉昭・吉岡朗諸氏に加え申請者らは「プランク定数を非形式的に見ることはできないか」という極めて素朴な発想から、収束を考慮する変形量子化の研究も継続してきた。これらは現時点では局所的な話題に限定されているが解析的観点からは興味深いものと考えられる。

(2) 以上の経緯に引き続き申請者は対象となる幾何学的対象を滑らかなカテゴリーに

制限しないで代数多様体や解析空間なども視野に入れ始め、特別な場合には正則ポアソン構造と呼ばれる古典的双ベクトル場を用いることで、「構造層の変形量子化にあたるものを考察することが可能ではないか」との着想を得た。また、正則ポアソン構造については、グアルティエリ氏により、全く別の視点、すなわち、リー・バイアルジェブroid、クーランアルジェブroid、一般複素構造や一般ケーラー構造とバイエルミート構造の関係を研究するということに端を発し詳しく調べられ始めた。これらの状況下において申請者は一般複素構造・一般ケーラー構造やバイエルミート構造とその量子化との関係とといったことについても興味を持つようになった。もうすこし詳しく述べよう。1で述べたとおりシンプレクティック構造、ポアソン構造、複素構造を包括的に含む概念である一般複素構造と呼ばれる幾何構造が導入されているが、一般複素構造においてその幾何学的変形が後藤竜司氏により詳細に研究されていることを鑑み、対応する一般複素構造の量子化（シンプレクティックの場合はすでにある程度、構成や分類が済んでいる）の考察をおこなうことを目的とした。方針はクーランアルジェブroidに現れる複体のコホモロジーの $(2,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(0,2)$ 成分に応じて量子化の方法を考えるということで、シンプレクティックについては $(0,2)$ に対応しており、上に述べたような状況であった。 $(1,1)$ については研究期間中、変形族のオリジンにコンパクトなケーラー多様体において微小変形族を構成しファイバーごとにケーラー構造を反映させた量子化を構成してそれが底多様体（パラメータ空間）の要素について滑らかにつながるように構成した。またポアソン方向については、射影スキームの量子化を定義し（ある特別な条件を課して）正則なポアソン構造方向への量子化について考察した。

(3) 最初に述べたように、量子化と幾何漸近とは密接に関連しつつ発展してきたことを考えれば、量子化にかかわる具体的対象（ハイゼンベルグ多様体上のディラック作用素など）の研究も研究すべき対象であろう。これについて楯辰哉氏、本間泰史氏と申請者はハイゼンベルグ多様体などのエータ不変量に関連しエータ関数の特殊値などを直接解析的手法により計算するという研究も行っている。これについてはその根底に幾何漸近的な発想や技術が存在していることも付け加えたい。

さらに量子化の研究と絡んで現在ポアソン構造を付与された Super Calabi-Yau ツイスター空間の研究も行っており以下に述べる論文を準備中である。

Tadashi Taniguchi and Naoya Miyazaki,
Poisson Structure on Super Calabi-Yau
Twistor Space and Deformation
Quantization, in preparation (準備中)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Naoya Miyazaki, Quantization of
holomorphic structure -related
generalized Kaehler structure-,
arXiv:math.DG, 1403.7709v2, 1-20, (査
読なし), 2014

Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya
Miyazaki and Akira Yoshioka,
Deformation of expressions for
elements of an algebra, in Poisson and
noncommutative geometry, MSRI,
Cambridge University Publication, vol.
62, 171-210, (査読あり), 2014

Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki and Akira Yoshioka,
Deformation Expression for Elements of Algebra, arXiv:mp, 1104.1708, (査読なし)、2011

Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka,
Deformation Expression for Elements of Algebras (I) --(Jacobi's theta functions and *-exponential functions)-arXiv:math-ph, :1104.2109, (査読なし), 2011

Naoya Miyazaki, Remarks on deformation quantization -quantization of the twistor space-, 数理解析研究所 (RIMS)、vol.1692, 1-16, (査読なし), 2010

〔学会発表〕(計 0 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織
(1)研究代表者
宮崎直哉 (MIYAZAKI Naoya)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：50315826