様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２６年　６月　２日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４００９６
研究課題名（和文）結び目不変量と保型形式及び楕円デデキント和の研究

研究課題名（英文）Knot invariants, modular forms and elliptic Dedekind sums

研究代表者
福原　真二（FUKUHARA, SHINJI）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：２００１１６８７
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円、（間接経費）　840,000円

研究成果の概要（和文）：代表者の研究の特徴はデデキント和を保型形式との関連においてとらえることにある。その点で今回、保型形式のなすベクトル空間の良い基底を構成することができたことは、大きな前進である。またこの基底を用いる事により、テータ級数の冪をアイゼンシュタイン級数を用いて表す公式も得られた。これから更に、整数nを2k個の整数の平方の和で表す仕方の個数に関する明示公式も得られる。これらの公式は数論的にの幾何学的にも興味深いと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The feature of our work is that we study Dedekind symbols in the relation with modular forms. Thus it is a significant step that we have constructed nice bases for the vector spaces of modular forms. We also obtained formulas to express powers of the theta function in terms of Eisenstein series. These formulas give us formulas for the numbers of representations of integers as sums of squares. These seem interesting from number theoretical and geometrical view points.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学　保型形式　デデキント和

１．研究開始当初の背景
　位相幾何学の研究の進め方の一つとして、不変量を用いて対象を位相的に分類してゆく方法がある。たとえば３次元多様体を様々な位相不変量を用いて分類してゆくことが行われている。それらの不変量の式にしばしば現れる関数としてデデキント和がある。この関数が重要な働きをする理由は、この関数が相互法則を満たすことにあるであろう。

　代表者はデデキント和と同様の相互法則を満たす関数を一般デデキント和と名付け研究対象としてきた。一般デデキント和のなすベクトル空間と１対１に対応することから、保型形式のなすベクトル空間の性質を調べる必要が生じる。特に、保型形式のなすベクトル空間に（我々にとって好都合な）基底を構成するにはどうすれば良いかが問題である。従来の基底では一般デデキント和を表すには適さないからである。

　もう一つの問題として一般デデキント和のなすベクトル空間の基底あるいは生成系を直接つくりだすことが考えられる。いまのところ楕円関数を用いた楕円デデキント和が（しかるべき相互法則を満たす一般デデキント和の）生成系になっていることが解っているが、より簡明な構成法が望ましい。

２．研究の目的
　さまざまな不変量に現れる一般デデキント和という関数に注目しその性質を究明していく。最初は、個々の一般デデキント和に注目するのではなく、一般デデキント和全体のなすベクトル空間の性質を調べる。このベクトル空間は、（相互法則に関する適当な条件の下に）保型形式のなすベクトル空間と自然に同型対応する。この事を手がかりに一般デデキント和の空間の構造を解明する。どちらの空間にもヘッケ作用が定義され、それらは、自然な対応によりたもたれるので、お互いの構造究明に役立つはずである。

　全体の構造が解ったとすると、次は個々の一般デデキント和の問題である。一般デデキント和が奇関数の場合に、その一般形は、楕円デデキント和を用いて表されるが、今回偶関数の場合にも同様の結果を得ることを目的する。その他、古典的デデキント和には各種の同値な表示法が研究されているが、一般デデキント和の場合も同様の事柄が生じているか調べる必要がある。

　それらの結果、一般デデキント和が各種不変量に登場する理由が解明される事を期待する。

３．研究の方法
　研究課題からも分かるとおり当研究は位相幾何学、整数論、複素解析等の分野にわたり、境界を越えた総合的研究を要する。そのために、解析数論や保型形式の専門家である Yifan Yang(National Chiao Tung University, Taiwan)と共同研究を行った。彼を津田塾大学に招待しセミナーやワークショップを行い、意見交換した。また Noriko Yui(Queen’s University, Canada)も招待し、保型形式に関する最新の話題を提供してもらった。

　デデキント和を用いた不変量の計算するには、数式処理のソフトウエアと高速な演算能力を持ったコンピュータを利用することになる。そして得られた実験結果から、一般的にどのような命題や公式が成立するかを推測し、証明へとつなげてゆく。

　研究分担者は結び目理論や低次元多様体論の研究集会に積極的に参加しており、そこで得られた最新の知識を新しい不変量の発見に生かそうと試みている。新しい不変量の定義に、楕円デデキント和などの一般デデキント和が活用出来ないか調べていく。

４．研究成果
　４年間の研究期間を通じて保型形式と一般デデキント和の関連性に対して理解が深まったといえる。我々の独自の方法は、一般デデキント和全体のなすベクトル空間と保型形式のなすベクトル空間との間の自然な同型対応を手がかりに一般デデキント和を解明することである。その点で、保型形式のなすベクトル空間に良い基底を見いだすことは大変重要な一歩であり、今回それが達成できた事は大きなの成果だと言える。またこの結果の応用として、整数 n を $2k$ 個の整数の平方の和で表す方法の個数に関する公式が得られた。これは半径の２乗が n であり中心が原点の $2k-1$ 次元球面上の格子点の個数を与える公式でもあり、幾何的にも数論的にも大切な式である。

　以下にこの間発表した論文のいくつかに関して、簡単な解説を記す。

　最初に紹介する論文は”Twisted Hecke L-values and period polynomials”, J. Number Theory, 130 (2010), 976-999で、代表者とYifan Yangとの共著である。この中でひねられた保型形式の周期多項式をひねられたベルヌーイ多項式を用いて表す公式を得ている。この公式から、いくつかのひねられた保型形式が一次独立かどうかを判定する事が出来る。対応する周期多項式の族が一次独立ならばもとの保型形式は一次独立であるからである。そして周期多項式の族の一次独立性は係数の数論的特徴を使って示せるからである。一つの応用として、ひねられた保型形式のなすベクトル空間の基底を見いだすことができた。

次の論文”A basis for the space of modular forms”, Acta Arith., 151 (2012), 421-427は（フルモジュラー群に関する）保型形式のなすベクトル空間の基底を明示的に与えるという内容である。従来、重み4と6のアイゼンシュタイン級数のべき乗を用いて表される基底がよく知られている。しかしこれだとそのフーリエ係数は大変複雑なものになってしまう。代表者は、(重みが一般には大きな)2つのアイゼンシュタイン級数の積として表せる基底を見いだした。この場合、フーリエ係数は2つの約数関数の積の和として、比較的簡単に表すことができる。尖点形式のなすベクトル空間に関しても、同様の結果を証明している。

次に論文”A basis for S_k(\Gamma_0(4)) and representaions of integers as sums of squares”, Ramanujan J. 28 (2012), 25-43に関して述べたい。この論文は代表者とYifan Yangとの共著である。当論文は、保型形式のなす空間M_k(\Gamma_0(4)) および尖点形式のなす空間S_k(\Gamma_0(4))の基底を与えることを目的としている。尖点の異なる2種類のアイゼンシュタイン級数に関して、その重みを適当に取り、さらにその積を取ることによって基底が構成できる。応用として、テータ級数の4の倍数乗を、アイゼンシュタイン級数を用いて表す公式が得られる。さらなる応用として、整数を4k個の整数の平方の和で表す方法の数に関する公式が得られる。これは8k個の整数に関するImamoglu-Kohnenの結果”Representations of integers as sums of an even number of square, Math. Ann. 333 (2005), 815-829を一般化したものになっている。

上記の考えを更に進めると、整数を 2k 個の整数の 2 乗和として表す表し方が次の問題になる。これに関しては次の論文”Bases for S_k(\Gamm_1(4)) and formulas for even powers of the Jacobi theta function”, Int. J. Number Theory 9 (2013), 1973-1993で扱っている。この論文も Yifan Yang との共著である。ここで扱っているのはベクトル空間S_k(\Gamm_1(4))であるが、これは前論文のベクトル空間 S_k(\Gamma_0(4))の場合より、格段に複雑になる。しかし、結果として各種のアイゼンシュタイン級数を用いることにより基底を構成することに成功している。

終わりに一般デデキント和の非可換化に関して記したい。Yu. Manin は最近の論文”Non-commutative generalized Dedekind symbols”,arXiv:1301.0078 において、一般デデキント和の非可換化を提案した。これは従来可換群に値をとる一般デデキント和を非可換な場合も含む形に拡張しようとするこころみであり、代表者も協力して研究が進められている。この方面の研究が更に進展するよう Yu. Manin と情報交換してゆくつもりである。

研究分担者はバシリエフ不変量と絡み目の局所変形に関する研究を続けている。研究所における発表会では、2 橋結び目の彩色数に関する結果を発表した。

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5 件）

1. “Bases for S_k(¥Gamma_1(4)) and formulas for even powers of the Jacobi theta function”, Shinji Fukuhara, Yifan Yang, Int. J. Number Thoery 9 (2013), 1973-1993 (査読有)

2. “A basis for S_k(¥Gamma_0(4)) and representations of integers as sums of squares”, Shinji Fukuhara, Yifan Yang, Ramanujan J. 28 (2012), 25-43 (査読有)

3. “A basis for the space of modular forms”, Shinji Fukuhara, Acta Arith. 151 (2012), 421-427 (査読有)

4. “Twisted Hecke L-values and period polynomials”, Shinji Fukuhara, Yifan Yang, J. Number Theory 130 (2010), 976-999 (査読有)

5. “The elliptic Apostol-Dedekind sums generate odd Dedekind symbols with Laurent polynomial reciprocity laws”, Shinji Fukuhara, Math. Ann. 346 (2010), 769-794 (査読有)

〔学会発表〕（計　0 件）

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

福原　真二　（FUKUHARA SHINJI）
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号：20011687

(2)研究分担者

宮澤　治子　（MIYAZAWA HARUKO）
津田塾大学・計数研・研究員
研究者番号： 40266276

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：