

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 1 日現在

機関番号：32644  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2010～2012  
 課題番号：22540097  
 研究課題名（和文） 大域リーマン・フィンスラー幾何学  
 研究課題名（英文） Global Riemann-Finsler geometry  
 研究代表者 Sabau Vasile Sorin  
 （東海大学・札幌教養教育センター・准教授）  
 研究者番号：80364280

研究成果の概要（和文）：本研究ではリーマン・フィンスラー構造の位相及び大域的な性質を明確にする。特に、測地線の振る舞い、cut locus、generalized Finsler 構造を許容する 3 次元閉多様体の位相を明らかにする。

研究成果の概要（英文）：This research clarifies global and topological properties of Riemann-Finsler structures. Precisely, we study the geodesics behavior, cut locus, topology of closed 3-manifolds carrying generalized Finsler structures.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000 円	150,000 円	650,000 円
2011年度	500,000 円	150,000 円	650,000 円
2012年度	500,000 円	150,000 円	650,000 円
年度			
年度			
総計	1,500,000 円	450,000 円	1,950,000 円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学、リーマン・フィンスラー構造

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) リーマン・フィンスラー構造は通常のリーマン構造より一般的であるが、ほとんどその局所的な面しか研究されていない。
- (2) 特に、測地線の大域的な性質、距離関数、Gauss-Bonnet 定理、cut locus の構造に関する研究結果は欠けている。

## 2. 研究の目的

- (1) リーマン・フィンスラー構造の測地線の大きな振る舞いを明確にすること。
- (2) Taut contact circles と 3 次元多様体上で定義されている generalized Finsler structures の関係を明確にすること。
- (3) Generalized Finsler structures を許容す

る 3 次元閉多様体の位相を決定すること。

## 3. 研究の方法

- (1) 測地線の大きな振る舞いを研究するには、主に変分問題法を使用する。特に、関連するヤコビ場、ヤコビ方程式、距離関数の微分性、cut locus の構造などを研究する。
- (2) Taut contact circles と 3 次元多様体上で定義されている generalized Finsler structures の関係を研究するには、moving frames 法、Cartan-Kahler 理論、外微分形式論の手法を用いる。
- (3) Taut contact circles、特にいわゆる Cartan 構造を許容する 3 次元閉多様体の分類を用いて generalized Finsler structures

を許容する3次元多様体の位相を研究する。

#### 4. 研究成果

##### (1) フィンスラー計量の測地線の振る舞い

リーマン多様体の測地線は reversible であるが、一般的にフィンスラー構造の場合、この性質は成り立たない。しかし、多くの幾何学的あるいは位相的な性質を調べるには測地線が reversible であることは非常に便利な性質である。そこで、リーマン構造あるいは absolute homogeneous フィンスラー構造以外に reversible 測地線を持つフィンスラー多様体があるかどうかを調べた。特に、計算的に取り扱いやすい $(\alpha, \beta)$ 計量に焦点を当てた。

まず、閉一次形式を用いてリーマン構造あるいは absolute homogeneous フィンスラー構造を線形的に変形すれば、reversible 測地線を持つフィンスラー多様体を得られることが分かった。代表的なフィンスラー構造として多項式計量がある。

さらに、リーマン warped product 多様体は標準的な閉一次形式をもつので、reversible 測地線を持つフィンスラー計量が自然に誘導されていることを示した。自然な reversible 測地線を持つフィンスラー計量を持つ多様体は symplectic 多様体である。従って、リーマン warped product や symplectic 多様体は reversible 測地線を持つフィンスラー多様体のモデルとなり、これらの幾何学や位相はリーマン多様体に近いとわかった。

##### (2) 一般フィンスラー構造を許容する3次元多様体の位相

Geiges と Gonzalo による定義された3次元多様体  $\Sigma$  上の R-Cartan 構造  $\alpha$  を用いて多様体  $\Sigma$  の位相が研究されている。これは特定の構造方程式を満たす多様体  $\Sigma$  上の coframe である。

一方、coframe 変換を用いて  $\alpha$  より  $\Sigma$  上に一般フィンスラー構造  $\omega$  を誘導する。即ち、coframe 変換  $\omega = A\alpha$  を満たす  $\Sigma$  上の行列  $A$  が存在すれば、一般フィンスラー構造を許容する3次元多様体の位相を決定できる。しかし、行列  $A$  の存在が問題となってくる。

そこで、coframe 変換  $\omega = A\alpha$  の外微分をとり、一般フィンスラー構造の構造方程式を使用すると、行列  $A$  の成分についての方向微分方程式が得られ、この解の存在を Cartan-Kahler 理論を用いて調べた。最も一般的な場合、具体的に解を得ることが難しいものの、特殊なケースは可能であることを示した。

構造関数  $(I, J, 1)$  をもつ一般フィンスラー

構造と taut contact circles、即ち Cartan structures, を許容する閉3次元多様体の間に1対1対応性があることを証明した。

従って構造関数  $(I, J, 1)$  をもつ一般フィンスラー構造を許容する閉3次元多様体は多様体  $G/\Gamma$  であることを証明できた。ここで、 $G$  はリー群  $SU(2)$ ,  $\tilde{SL}_2$ ,  $\tilde{E}_2$  のどれかで、 $\Gamma$  は  $G$  の離散部分群である。さらに、moduli space や具体的な例を明確にした。

##### (3) リーマン・フィンスラー構造の距離関数や cut locus

リーマン・フィンスラー構造の測地線の大域的な振る舞いに関して、距離関数の微分性を調べた。それは、 $N$  は  $n$  次元リーマン・フィンスラー多様体の閉部分集合のとき、 $N$  からの距離関数が点  $q$  における可微分関数となる必要十分条件は  $N$  から  $q$  への測地線分が唯一存在することである。

さらに、 $N$  からの測地線分2本を許容する cut point の集合は  $N$  の cut locus 内の dense set になっている。

次に、リーマン・フィンスラー曲面の cut locus の構造を調べた。 $N$  はリーマン・フィンスラー曲面の閉部分集合のとき、 $N$  の cut locus は rectifiable Jordan arcs で構成されている local tree である。さらに、cut locus の intrinsic metric 位相とリーマン・フィンスラー曲面の induced metric 位相は一致することがわかった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. M. I. Masca, S. V. Sabau, H. Shimada, Two dimensional  $(\alpha, \beta)$ -metrics with reversible geodesics, Publicationes Mathematicae Debrecen, 82/2 (2013), 485-501、査読あり
2. S. V. Sabau, K. Shibuya, H. Shimada, Moving frames on generalized Finsler structures, J. Korean Math. Soc., Vol. 49, No. 6 (2012), 1229-1257、査読あり
3. S. V. Sabau, H. Shimada, Finsler manifolds with reversible geodesics, 57 (2012), 91-103、査読あり
4. C. Bohmer, T. Harko, S. V. Sabau, Jacobi stability of dynamical systems-Applications in Gravitation and Cosmology, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 16 (2012), 1-51、査読あり

5. M. Tanaka, S. V. Sabau, The cut locus and distance function from a closed subset of a Finsler manifold (2012)、投稿中
6. S. V. Sabau, R. Yoshikawa, Kropina metrics and Zermelo navigation on Riemannian manifolds, (2012)、投稿中
7. S. V. Sabau, K. Shibuya, Gh. Pitis, Generalized Finsler structures on closed 3-manifolds (2012)、投稿中

[学会発表] (計 6 件)

1. S. V. Sabau, On the cut locus of Finsler manifolds, The 47-th Symposium on Finsler geometry, Nov. 2012, Kagoshima.
2. S. V. Sabau, The structure of the cut locus of a Finsler surface, The 3-rd KMITL-TKU Joint International Symposium on Mathematics and Applied mathematics, July 2012, Pattaya, Thailand.
3. S. V. Sabau, On the cut locus of Riemann-Finsler surfaces, Geodesic theory methods in Finsler geometry, Sept. 2011, Kyoto.
4. S. V. Sabau, On the variational problem for Riemann-Finsler surfaces and related topics, The 7-th International congress of Romanian mathematicians, July 2011, Brasov, Romania.
5. S. V. Sabau, The cut locus structure for Riemann-Finsler surfaces, The 46-th Symposium on Finsler geometry, Nov. 2011, Shizuoka.
6. S. V. Sabau, Remarks on the geometry of magnetic geodesics, The 45-th Symposium on Finsler geometry, Sept. 2010, Tokyo.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

[その他]  
 ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者 ( )

研究者番号：

(2)研究分担者 ( )

研究者番号：

(3)連携研究者 ( )

研究者番号：

