

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540102

研究課題名（和文） 巡回群の同変理論からみた分類空間のコホモロジーの研究

研究課題名（英文） Cohomology of classifying spaces from the viewpoint of equivariant cohomology of cyclic groups

研究代表者

亀子 正喜 (KAMEKO MASAKI)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：50270343

研究成果の概要（和文）：位相幾何学における重要な概念である特性類は分類空間と呼ばれる空間のコホモロジーとして記述することができる。分類空間のコホモロジーの研究は長い間多くの数学者の関心を引きつけてきた。本研究では分類空間のコホモロジーの計算を課題として取り上げた。特に構造群のコホモロジーがねじれを持つ場合にその計算は困難になるのであるがその場合について分類空間とそれに関連する空間のコホモロジーの計算を行った。

研究成果の概要（英文）：Among important notions in topology, there are characteristic classes. Characteristic classes are elements in the cohomology of classifying spaces. So, the study of the cohomology of classifying spaces has been attracting the attention of many mathematicians. In our research project, we attempted to compute the cohomology of classifying spaces. When the cohomology of structure group has torsion, the computation tends to be difficult. We dealt with such groups and computed the cohomology of some spaces related to classifying spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー, 位相幾何

## 1. 研究開始当初の背景

分類空間や旗多様体などのコホモロジーは位相幾何学だけではなく数論, 代数幾何, 組み合わせ論, 数理物理など他分野にも関連したものである。

(1) たとえば Totaro は分類空間のコホモロジーを代数多様体のコホモロジーの言葉

で記述し分類空間のチャウ環と一般コホモロジーである複素コボルディズム理論を結びついている。

(2) また分類空間のコホモロジーは数論における Garibaldi, Kerkurjev, Serre らによる cohomological invariants の研究などへの応用も期待できる。

- (3) これ以外にも分類空間のコホモロジーの研究は有限シュバレー群のコホモロジーと関連して有限群のコホモロジーの研究につながっていく.
- (4) さらに分類空間の自由ループ空間はループ群の分類空間でもあり数理論理におけるゲージ理論にもつながってゆくことが予想できる.

## 2. 研究の目的

$p$  を素数,  $G$  をリー群あるいは代数群,  $BG$  をその分類空間とする. 分類空間  $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジーとそれに関連する一般コホモロジー, チャウ環, モチービックコホモロジーなどを  $G$  の中の極大トーラスの巡回群またはその直積である基本可換  $p$ -群による拡大  $N$  の分類空間のコホモロジーと関連付けて研究することを当初の目的とした.

上にあげたつながりを意識しつつ群  $G$  の整係数ホモロジー群がねじれ部分群を持つ場合の分類空間  $BG$  のコホモロジーを特にその計算を通して調べてゆくことが本研究の当初の目的であった. ここではコホモロジーを  $\text{mod } p$  コホモロジーとそれに関連する一般コホモロジー, チャウ環, モチービックコホモロジーなどを含むものとして

- (1) まだ計算されていない分類空間  $BG$  のコホモロジーを計算すること,
- (2) すでに計算されている  $BG$  のコホモロジーの計算結果をより見通しよい方法で再計算すること,
- (3) そしてそれを通して分類空間のコホモロジーの計算の統一的方法を見いだすこと

を当初の目的として挙げた. 上の他分野とのつながりの点では一般コホモロジーやモチービックコホモロジーが重要になる.

## 3. 研究の方法

研究の方法としては当初は Borel による分類空間  $BG$  のコホモロジーからその極大トーラスの分類空間のコホモロジーへの準同型写像を調べる手法を発展させることに主眼をおいた. Quillen は極大トーラスを基本可換  $p$ -群  $A$  たちに置き換えて  $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジーから  $BA$  の  $\text{mod } p$  コホモロジーへの誘導準同型を考え, これが  $BG$  の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジーと  $BA$  の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジーの極限の間の  $F$  同型を誘導することを示した. Quillen

の結果そのものはある意味定性的なものであり, 直接  $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジーの計算に役立つものではない. しかしながら Adams と Kono は  $p$  が奇素数の場合に Quillen の準同型が単射になると予想している. この研究では基本可換  $p$ -群  $A$  を極大トーラス  $T$  の正規化部分群の部分群  $N$  に置き換えて  $BG$  のコホモロジーから  $BN$  のコホモロジーへの誘導準同型を考えることにより分類空間のコホモロジーを計算することを目指した.

しかし研究途中から  $G$  の表現から得られる誘導準同型の研究と非自明なレイ・セルのスペクトル系列を用いることになる.

## 4. 研究成果

以下,  $p$  を素数,  $G$  をリー群または代数群,  $BG$  をその分類空間とする. 2010 年度は研究の目的としてあげた「すでに計算されている  $BG$  のコホモロジーの計算結果をより見通しよい方法で再計算すること」を軸に研究を進めた.

- (1) 2010 年度に射影ユニタリ群の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジーについては極大トーラスの正規化部分群の部分  $p$ -群(可換基本  $p$ -群のリース積)のコホモロジーと関連した形で記述できる可能性についての予想を数理解析研究講究録 No. 1679 の中で述べた.
- (2) 2010 年度に例外リー群  $E_7$  の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジーについては射影ユニタリ群の分類空間のポワンカレ級数の記述方法にもつながる形でより分かりやすいポワンカレ級数の記述方法を見いだし 2010 年 11 月のホモトピー論シンポジウムで発表した.
- (3) 例外リー群  $E_6, E_7, E_8$  の分類空間の  $\text{mod } 2$  コホモロジーはスチーンロッド代数上の代数として次数 4 の元ともう一つの元から生成されると予想されている ( $E_6, E_7$  については正しいが  $E_8$  の場合は予想である). 2010 年度に複素ベクトル束の特性類であるチャーン類を用いて例外リー群の分類空間の  $\text{mod } 2$  コホモロジーの次数が 4 ではない方の生成元あるいはその 2 乗が記述できることを示し 2011 年 1 月と 3 月に研究集会で話をした. 2011 年度に簡単な証明を論文 "Chern classes and generators" にまとめて投稿した. これは年度内に受理され出版された.

- (4) 例外リー群の分類空間の mod 2 コホモロジーの生成元の間には非自明な関係式があることが知られている. 2010 年度に生成元のある複素表現のチャーン類として表したときに例外リー群  $E_6$  の分類空間の mod 2 コホモロジーの生成元の間関係式がチャーン類とスチーンロッド代数の満たすべき関係式(ウーの公式)から導かれることを見だし 2010 年 11 月に岡山大学で話をした. これについては  $E_7$  の場合も含めた形で論文として計算機での計算結果をふまえてまとめようとしているところである.

2011 年度も「すでに計算されている BG のコホモロジーの計算結果をより見通しよい方法で再計算すること」を軸に研究を進めた.

- (5) 2011 年度に 2010 年度に投稿してあった多項式環と外積代数のテンソル積の不変式環と例外群の分類空間のモチービックコホモロジーに関連したコホモロジーの同型についての論文 "Coniveau spectral sequences of classifying spaces for exceptional and Spin groups" が受理され出版された.
- (6) 2011 年度には BT から BG への写像のホモトピーファイバーが  $G/T$  であり, この  $G/T$  のコホモロジーが奇数次の生成元を持たないことを利用してそのルレイ・セールスペクトル系列を計算し BG のコホモロジーから BT のコホモロジーへの誘導準同型をいくつかの  $G$  について計算した. その結果, 計算がなされた  $G$  についてはその像がちょうど Weyl 群の不変量になっていることを確認できた.

2012 年度もすでに計算されている BG のコホモロジーの計算結果をより見通しよい方法で再計算すること, そしてそれを通して分類空間のコホモロジーの計算の統一的方法を見出すことに重点を置いた研究を目指した. その過程で非自明なセールのスペクトル系列について再考することが重要であることが判明した. この非自明なルレイ・セールのスペクトル系列を計算するという視点からリー群の分類空間の自由ループ空間のコホモロジーについて研究した.

- (7) 上の視点から Kuribayashi, Mimura, Nishimoto らによる  $BSpin(10)$  の自由ループ空間の mod 2 コホモロジーの計算の再検討を行った. スピノール群の分類空間  $BSpin(n)$  の自由ループ空間の mod 2 コホモロジーが Gysin 系列によっ

て計算可能であることを見出し, 上の計算を見通しよくする手法を見出し, これを用いてスピノール群の分類空間の mod 2 コホモロジーが対応する有限シュバレー群の mod 2 コホモロジーと次数付きのベクトル空間として同型であることを示した. この結果については 2012 年 9 月に数理解析研究所で行われた RIMS 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」で「On the cohomology of the free loop space of the classifying space of a spinor group」と題して発表した.

- (8) Kuribayashi, Mimura, Nishimoto らによる  $BPU(3)$  の mod 3 コホモロジーの環構造についての部分的な結果(ベキ零でない元の存在)も得られた. これについては京都大学での談話会で発表した.

この研究を通して群  $G$  の部分群を通して分類空間 BG のコホモロジーを研究する手法に加えて  $G$  の表現から得られる誘導準同型の研究と非自明なルレイ・セールのスペクトル系列の研究が(有限シュバレー群のコホモロジーの研究や)分類空間のコホモロジーの研究において重要であるとの認識に達した.

“Coniveau spectral sequences of classifying spaces for exceptional and Spin groups” は本研究の当初の方法としてあげた部分群を通しての BG の研究に相当するが “Chern classes and generators” は  $G$  の表現を用いた論文であり,  $BSpin(10)$  の自由ループ空間の再計算はルレイ・セールのスペクトル系列の有用性を示すものである. これらが今回および前回の研究を次の研究へと導くものになる. 上にあげた個々の成果ではなくこれこそが今回の最も重要な研究成果かもしれない.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- (1) Masaki Kameko and Mamoru Mimura, Weyl group invariants - the case of projective unitary group  $PU(p)$  - . 数理解析研究所講究録 1784, 31-41. URL:<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1784.html> 2012 年 3 月 (査読なし)

- (2) Masaki Kameko, Michisige Tezuka and

Nobuaki Yagita,  
Coniveau spectral sequences of classifying  
spaces for exceptional and Spin groups.  
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 152(02),  
251-278.  
DOI:<http://dx.doi.org/10.1017/S0305004111000545>  
2012年3月(査読あり)

(3) Masaki Kameko,  
Chern classes and generators.  
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 88(1),  
21-23.  
DOI:10.3792/pjaa.88.21  
2012年1月(査読あり)

(4) Masaki Kameko,  
Cohomology of the cyclic group  $Z/p$ .  
数理解析研究所講究録 1679, 98-112.  
URL:<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1679.html>  
2010年4月(査読なし)

[学会発表](計 10 件)

(1) 亀子 正喜,  
射影ユニタリ群  $PU(3)$  の分類空間の  $\text{mod } 3$   
コホモロジー再訪  
京都大学談話会  
京都大学  
2013年1月23日

(2) 亀子 正喜,  
スペクトル系列における対消滅現象  
福岡大学トポロジーセミナー  
福岡大学  
2012年12月3日

(3) 亀子 正喜,  
On the cohomology of the free loop space  
of the classifying space of a spinor group.  
RIMS 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」.  
京都大学  
2012年9月11日

(4) 亀子 正喜,  
Extraspecial groups and projective  
unitary groups.  
城崎ホモトピー論研究集会  
城崎  
2011年11月4日

(5) 亀子 正喜,  
Weyl group invariants.  
RIMS 研究集会「有限群のコホモロジーとその周辺」

京都大学  
2011年8月30日

(6) 亀子 正喜,  
Weyl group invariants.  
岡山大学談話会  
岡山大学  
2011年6月28日

(7) 亀子 正喜,  
Chern classes and generators.  
非安定ホモトピー論指宿集会  
指宿  
2011年3月17日

(8) 亀子 正喜,  
Chern classes and generators.  
東京都市大学数理科学セミナー  
東京都市大学  
2011年1月20日

(9) 亀子 正喜,  
Wu formula.  
トポロジーセミナー  
岡山大学  
2010年11月25日

(10) 亀子 正喜,  
Poincare series of the cohomology of  $BE_7$   
revisited.  
ホモトピー論シンポジウム  
九州大学西新プラザ  
2010年11月3日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

亀子 正喜 (KAMEKO MASAKI)  
芝浦工業大学・システム理工学部・教授  
研究者番号: 50270343

### (2) 連携研究者

柳田 伸顕 (YAGITA NOBUAKI)  
茨城大学・教育学部・教授  
研究者番号: 20130768