様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号： ５３８０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2013
課題番号： ２２５４０１０９

研究課題名（和文） 微分方程式と幾何構造の関係に関するツイスター理論による解明

研究課題名（英文） Study on relations between differential equations and geometric structures by the method of twistor theory

研究代表者
待田　芳徳（MACHIDA, YOSHINORI）

沼津工業高等専門学校・教養科・教授

研究者番号：９０１４１８９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円、（間接経費）　990,000円

研究成果の概要（和文）：ツイスター理論とは，２重ファイバー束を通して，異なる幾何構造の双対性をみることであるといえる．一方の空間の幾何構造に付随した微分方程式の方程式自身やそれの解の構成，性質等を，他方の空間の幾何構造からツイスター図式を通して調べていく．この考えに沿って，コーン場に付随したもの，モンジュ・アンペール系，リー代数の表現に付随したもの，多項式のべきの積分に付随したものをあつかった．D_4ツイスター図式からの共形３対性をあつかい、幾何構造、特異点、そして微分方程式を調べた。(3,3)型カルツア・クライン時空をあつかい、誘導表現からSO(4,4)表現でスカラー場、ベクトル場、そしてスピノル場を調べた。

研究成果の概要（英文）：An observation of twistor theory is to research relations and correspondences between different geometric structures via double fibrations. For various classes of differential equations associated with geometric structures, we study geometric meanings of equations, properties of solutions, constructions of equations and solutions. We discuss differential equations associated with cone structures, Monge-Ampere systems, equations associated with Lie algebra representations, equations associated with integrals of powers of polynomials. Treating with conformal triality from D_4 twistor diagram, we study the geometric structures, singularities, and differential equations. Treating with Kaluza-Klein space-time with (3,3) type, we study the scalar field, the vector field, the spinor field induced by the conformal SO(4,4) representation.

研究分野： 微分幾何学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： ツイスター理論　微分方程式　幾何構造　旗多様体

１．研究開始当初の背景

Penrose によって始められたツイスター理論の概要は、4 次元(複素)時空での共形不変な線形・非線形な場の方程式を、ツイスター空間と呼ばれる 3 次元複素多様体での関数、ベクトル束、層などの幾何的対象物に置き換えて議論することにある。そのツイスター理論は、両方の空間を時空とツイスター空間の間の２重ファイバー束としてとらえて、ダイナミックに議論をしていくのである。

その立場にたって、本質的には「ツイスター理論とは、２重ファイバー束を通して、異なる幾何構造の双対性をみる」というふうに言うことができる。通常のいろいろな双対性と違って、幾何構造の土台となる空間の次元は一般には異なっていることが眼目である。

ツイスター理論を、微分方程式、幾何構造、そしてリー群の三位一体を基礎として、研究をすすめていく。三位一体は Lie や Cartan 以来の思想、理念であるが、対称性を表わす Lie 群は平坦なツイスター理論の自己同型群として当然のように顔を出す。

一方の空間の幾何構造に付随した微分方程式、微分式系、特性系自身や解を、他方の空間の幾何構造に付随した部分多様体、関数から構成していく。双対的に立場を逆にして、同様な方法でやっていく。

２．研究の目的

ツイスター理論を展開していく土台の典型的な空間は旗多様体である。すなわち、次数つき Lie 代数とそれから定義される旗多様体に関する放物幾何、巾零幾何、および非ホロノーム幾何である。その空間の幾何構造をモデル空間の平坦な幾何構造として曲がったものも考えていく。1 つの Dynkin 図形から基本ルートの部分集合を指定することによって、トップ空間も含めた 3 つの旗多様体による２重ファイバー束が自然に作られる。

調べる微分方程式として、今まで常微分方程式ではパス幾何、Clairaut 方程式、偏微分方程式では線形で Laplace 方程式、超幾何方程式、非線形で Monge-Ampere 方程式、Goursat-Cartan 方程式をあつかってきたが、さらにそれらの一般化したもの、発展させたものをあつかう。その他に、Lie 代数表現に付随した微分方程式や多項式のべきの積分をあつかう。

３．研究の方法

研究テーマの中心であるツイスター理論は、多岐の分野に関連している。数学としては、微分幾何、代数幾何、位相幾何などの幾何、微分方程式、複素関数論などの解析、可換環論の代数、その他に表現論、特異点論、組合せ論等であり、物理としては、相対性理論、量子力学、場の理論、超弦理論の他に、古典・量子光学、可積分系の数理物理等のそれぞれ多くの分野にまたがっている。

研究代表者は、中心テーマであるツイスター理論を主に掘り下げていき、専門の微分幾何をはじめ、微分方程式、複素関数論、物理の相対性理論、超弦理論、可積分系などに関わり、各連携研究者には、他の上記の関連分野に補ってもらった。

各連携研究者を含めて他の研究者との情報交換、及び議論が必要なためセミナー、研究会をほぼ定期的に行なった。いろいろな関連するセミナー、研究会に参加し、研究発表してその反応、評価をみることも大事であるし、他の研究者の講演から参考、刺激を受けることも大事であった。

４．研究成果

(1) パス幾何とコーン場に付随した微分方程式------

・接触射影構造と Lagrange・Grassmann 構造の B_2=C_2 型ツイスター対応における 3 次元の場合、ヌルコーンに関する接曲面からの特異点、3 階常微分方程式の解、2 階 Goursat 方程式および包合系の構成について調べた。特異点に関して、3 次元接触射影空間と 3 次元 Minkowski 空間への接曲面の対応は、カスプ型同志、Mond 型と燕の尾型、折り込まれたひだ型と Shcherback 型となり、双対の対称性が崩れていることがわかった。3 階常微分方程式の解空間は、Wunschmann 不変量が 0 であれば(2,1)型共形構造構造、すなわちヌルコーン構造が入ることが知られているが、0 であるなしにかかわらず凸コーン構造が入ることがわかった。

・3 つのそれぞれ 5.6,5 次元の G_2 型旗多様体におけるツイスター図式を構成的に構築し、自然な座標系を作った。それをもとに、幾何構造に付随した曲線の 2 つの接曲面の特異点を調べ、その双対性を論じた。接曲面の対応は、カスプ型同志、開 Mond 型と開燕の尾型、開折り込まれたひだ型と開 Shcherbak 型となり、B_2=C_2 型のツイスター図式との関連性がわかった。また、Lagrange コーン場に付随した 2 階偏微分方程式を幾何的に定義して、Goursat と Cartan の考えた 2 階偏微分方程式のいろいろな結果の本質と普遍性がわかった。

(2) Lagrange 対をもつ Monge-Ampere 系 ------

・双可積分、Hesse 型、Euler・Lagrange 型、平坦型という階層的なクラスの分類ができたが、それらを不変量で特徴づけるために, Lie 代数コホモロジーによる計算をした。

・以下の D_4 型ツイスター図形からの共形 3 対性から、2-Monge・Ampere 系が見つかり一般的な議論をはじめた。

(3) D_４型 Dynkin 図形からの共形 3 対性 ------

(4,4)型内積をもつ 8 次元ベクトル空間において、1 次元ヌル、2 クラスの 4 次元ヌル部分空間全体からなる$S^3\times S^3$に微分同相な6次元で(3,3)型共形構造をもつ 3 対なQ_0,Q_+,Q_-を考える。12 次元完全旗多様体でのEngel積分曲線からのからの射影から構成される3つの接曲面の特異点の分類を3対性を考慮しておこなった。3つがカスプ型、1つが開燕の尾型で他の 2 つがカスプ型、3 つが開Mond型というふうに5つに分類される。さらに D_4 を頂点としたヒエラルキーで folding と removing をくり返して、B_3, $A_3=D_3$, G_2, $C_2=B_2$, A_2ができて、幾何構造、特異点、微分方程式の関係がわかった。

(4) (3,3)型Kaluza-Klein時空------
上記の(3,3)型 6 次元空間上の共形不変な場の理論を考える。6 次元空間は旗多様体として$SO(4,4)/P$として表示できるが、Bruhat分解から$P=MAN$ (ここで$M=SO(3,3)$)のスカラー、ベクトル、スピノルの誘導表現として$SO(4,4)$の無限次元表現から質量 0 のスカラー場、電磁場、電子場を構成した。Laplace作用素、Dirac 作用素、Radon 変換をまつわり作用素としてとらえ、不変な運動方程式と解を考えた。さらに3つの場の3対性を考えた。伝搬関数をツイスター空間での2閉形式のツイスター積分表示としてとらえた。

(5) 次数つきLie代数の表現に付随した線形微分方程式系とGrassmann多様体の外在的幾何の関係------
・第1種の射影構造と共形構造以外の平坦でないものはA型の接触構造とC型の接触構造しかないことを示した。低次元での $SL(3)$型と $Sp(2)$型において非自明な例や不変量の具体的な計算をおこなった。前者は $SO(2,2)$型の3次元射影空間の中の双曲放物面の分離した1次元分解の接触バージョンであり、後者は$SL(3)$型の 5 次元射影空間の中の射影曲面の 2 次 Veronese 埋め込みの接触バージョンである。
・線形と非線形の関係がわかり一般化ができた。それは線形方程式系と外在的幾何の対応が非線形方程式系と内在的幾何の対応が関係しあっているということである。D_2 型線形とD_3型非線形の関係から、D_kでの標準表現からくるものが D_{k+1}の幾何構造との関係がわかった。A_2型線形とC_3型非線形の関係から、A_kでの 2 次対称積表現からくるものが C_{k+1}の幾何構造との関係がわかった。

(6) 多項式のべきの積分のGauss-Manin接続の構成------
・多項式のべきの超幾何積分に付随した de Rhamコホモロジーが、2重フィルターをもつ対数微分形式の部分複体に同型であることを組み合わせ論的に示した。そのことより、基底に関してより深い構造がわかった。
・1 変数の複数個の一般次数の多項式のべきの超幾何積分に関して Gauss・Manin 接続を構成して、特異点の判別式と終結式との関連をみた。その平坦な接続形式は対数的で、Schur1-形式の表示をもつことがわかった。付随してホロノミックな線形偏微分方程式系も構成できた。さらに、同次元性より、係数の空間上に判別式=0,終結式=0 に沿って対数極をもつ振率0の平坦なアフィン接続も構成できた。2 次の場合に、円配置からくるものとしてもGauss・Manin接続を構成した。

５．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)
① 待田芳徳、青本和彦、Double filtration of twisted logarithmic complex and Gauss-Manin connection, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 2014, JMSJ6590
② 待田芳徳、石川剛郎、高橋雅朋、Geometry of D_4 conformal triality and sibgularities of tangent surfaces, Hokkaido Univ. EPrints Server, 査読無、1051, 2014, pp.1-25
③ 待田芳徳、石川剛郎、高橋雅朋、Singularities of tangent surfaces in Caetan's split G_2-geometry, Hokkaido Univ. EPrints Server, 査読無、1020, 2012, pp.1-26
④ 待田芳徳 石川剛郎、高橋雅朋、Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality, J. Singularities, 査読有、3, 2011, pp.126-143

〔学会発表〕(計12件)
① 待田芳徳、D_4 図式からの共形 3 対性の幾何と特異点、日本数学会・秋季総合分科会、2013年9月24日、愛媛大学
② 待田芳徳、Gauss-Manin connections derived from one-dimensional hypergeometric integrals, Singularities in geometry and applications III, 2013年9月4日、イギリス・エジンバラ
③ 待田芳徳、射影双対性から共形 3 対性、シンプレクティック幾何とその周辺、2012年11月２０日、秋田大学
④ 待田芳徳、判別式と終結式に関連する微分方程式、シンプレクティック幾何とその周辺、2011年11月10日、岐阜経済大学
⑤ 待田芳徳、リー代数の表現に付随した微分方程式、リー群とその周辺, 2010年10月10日、信州大学
⑥ 待田芳徳、Monge-Ampere systems with Lagrange pairs, 11th international and

its applications, 2010 年 8 月 29 日、チェコ・ブルノ

〔図書〕(計　1　件)
待田芳徳、藤井一幸、鈴木達夫、浅田明、岩井敏洋、遊星社、数理の玉手箱、2010 年、pp.132-172

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
待田　芳徳　(MACHIDA YOSHINORI)
沼津工業高等専門学校・教養科・教授
研究者番号：９０１４１８９５

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
石川　剛郎　(ISHIKAWA GOO)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号：５０１７６１６１

森本　徹　(MORIMOTO TOHRU)
奈良女子大学・名誉教授
研究者番号：８００２５４６０

藤井　一幸　(FUJII KAZUYUKI)
横浜市立大学・総合科学部・教授
研究者番号：００１２８０８４

高橋　雅朋　(TAKAHASHI MASATOMO)
室蘭工業大学・ひと文化系・准教授
研究者番号：８０４３１３０２