

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540111

研究課題名(和文) 弾性波動の漸近挙動と逆問題

研究課題名(英文) Asymptotic analysis for wave propagation in elasticity and inverse problems

研究代表者

田沼 一実 (Tanuma, Kazumi)

群馬大学・理工学研究院・准教授

研究者番号：60217156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、弾性体の非等方性および不均質性が弾性波の挙動に及ぼす影響を明らかにすることを目標に、弾性表面波(Rayleigh波)の位相速度に対して、周波数に関する漸近展開式を導いた。この結果は、弾性体の不均質性によって発生する弾性表面波の分散現象を、弾性波動方程式の数学解析により、弾性テンソルをもちいて定式化したものである。またRayleigh波の位相速度と、2つの非等方弾性体の界面近傍を伝播する界面波の位相速度に対して、非等方性に関する一次摂動公式を導いた。以上の順問題解析の結果を、弾性波の観測により弾性体の非等方性と不均質性(残留応力によるものも含む)を決定する逆問題に応用した。

研究成果の概要(英文)：In this research project we obtain a high-frequency asymptotic formula for the velocity of elastic surface waves (Rayleigh waves) which propagate along the surface of an inhomogeneous, anisotropic elastic media. This formula expresses the frequency-dependence of the Rayleigh-wave velocity, i.e., the dispersion of Rayleigh waves, as caused by the inhomogeneity of the medium. We also give a formula for the first-order perturbation of the velocity of Rayleigh waves and give a formula for that of interfacial waves which propagate along the bonded interface between two dissimilar semi-infinite anisotropic elastic media, as caused by the anisotropy of the media. These results can be applied to the inverse problems in non-destructive evaluation, seismology, and materials science, i.e., the problem of determining the anisotropy and the inhomogeneity of elastic media with initial stresses from boundary measurement of velocities of the aforementioned elastic waves.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般

キーワード：応用解析 弾性波 非等方弾性体 Rayleigh 波 残留応力 逆問題 Stroh formalism surface impedance

## 1. 研究開始当初の背景

弾性波の観測により、弾性体に含まれる未知の性質、たとえば材料の加工過程で弾性体内部に生じた残留応力、弾性体内部の介在物、あるいは弾性体自身の非等方性、不均質性を決定する試みは、材料力学、地球物理等の分野で長く研究されてきた重要なテーマである (Smith and Dahlen, J. Geophys. Res. (1973) および Sayers, Proc. Roy. Soc. London (1985) 等)。研究代表者はこれまで、弾性波の観測による弾性体の非等方性の決定問題に動機を得て、弾性体表面を伝播する弾性波の一つである Rayleigh 波の挙動に、弾性体の非等方性がどのような影響を及ぼすかを、弾性波動方程式に対する数学解析を通して考察してきた。ここで Rayleigh 波とは、弾性体の自由境界表面の近傍を、実体波よりも遅い速度で伝播する弾性波のことで、弾性波動方程式の特殊解の一つとして表現される。工学上 Rayleigh 波は他の弾性波と比べ、境界表面に振幅が集中し減衰が少なく、正確に計測できる利点がある。

非等方性が等方弾性テンソルからの摂動によって与えられている場合に研究代表者は、非等方弾性体方程式を系統的に扱うために考案された Stroh formalism を数学解析の基礎にして、Rayleigh 波の自由境界表面での位相速度に対して一次摂動公式を導いた。ここでは、弾性テンソルの非等方成分 (最大 21 個の独立成分を有する) が、Rayleigh 波速度の一次摂動にどのように寄与するかを具体的に示した。さらに弾性体表面での振幅の縦波成分と横波成分の比 polarization ratio、および縦波成分と横波成分間の位相差 phase shift に対しても一次摂動公式を導いた。

以上は、既知の弾性体に生じた Rayleigh 波の挙動を調べるという順問題側の結果であるが、一方 Rayleigh 波観測により未知の非等方性を決定する逆問題に方向性を示唆することで重要であった。

上述の研究は、弾性テンソルが領域内で一定 (均質) という条件 (斉次条件) 下で考察されている。これは近似理論としては有用であるが、残留応力 (残留応力項として非等方弾性テンソルの成分に繰り込める) は局在するもので一様に存在するものでない。また弾性材料が厚さ方向に不均質である場合、あるいは自由境界面を持つ弾性体とみなした地球の内部が層状に変化している場合などは、現実のモデルとして当然でありながら以上の結果は適用できない。そこで本研究では、弾性テンソルが領域内で変化する、すなわち

不均質という仮定をおく。不均質弾性体においては、自由境界面近傍を伝播する表面波 (Rayleigh 波) の位相速度は周波数に依存する。これは Rayleigh 波の分散現象として知られており、これまで多くの観測、数値実験、そして分散現象より弾性体の性質を同定する逆問題解析への応用が研究されてきた (Aki and Richards, Quantitative Seismology 2nd ed, University Science Books, 2002 および Man et al., Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (2000) 等)。しかしながら、そこでは種々の弾性体に固有な技巧的な方法をもちい、系統的解析方法が使われているとは言い難い。非等方弾性体における分散現象の厳密な数学解析は、いまだ完成されていない。

以上の背景の下で本研究では、弾性テンソルが非等方性を有しつつ領域内で不均質である場合に、非等方性および不均質性の Rayleigh 波への寄与について系統的な数学解析を行うこと (順問題)、および、弾性テンソルが未知のとき、Rayleigh 波の挙動から、弾性テンソルの非等方性・不均質性を再構成する逆問題を目標とした。

## 2. 研究の目的

弾性体の非等方性および不均質性が、弾性表面波の一つである Rayleigh 波の挙動にどのように影響するかを明らかにするため、自由境界面での Rayleigh 波速度の、周波数に関する漸近展開式を求め、展開式各項の、非等方性および不均質性への依存性を明確にする。そこでの結果を基礎に、Rayleigh 波の挙動から、弾性体の非等方性および不均質性を決定する逆問題に対して、再構成アルゴリズムを構築する。弾性波動方程式の数学解析を通じて、工学とくに非破壊検査で重要な逆問題に対し、系統的な解析手法を確立する。具体的には

(1) 非等方弾性体の表面を伝播する Rayleigh 波の速度、polarization ratio および phase shift の、周波数に関する漸近展開式 (分散公式) を求める。それぞれの展開式の各項の係数に、弾性テンソルの不均質性と非等方性がどのように寄与するかを明確にする。(順問題)

(2) 内部に介在物を含む等方弾性体の表面を伝播する Rayleigh 波速度の、周波数に関する漸近展開式 (分散公式) を求める。展開式の各項の係数に、介在物に関してどのような情報が含まれているかを明確にする。(順問題)

(3) 分散公式の各項から, 弾性体の不均質性と非等方性を表現している弾性テンソルを再構成するアルゴリズムを構築する。(逆問題)

### 3. 研究の方法

#### (1) 平成 22 年度~23 年度

1 田沼一実・中村玄(連携研究者).....弾性波動方程式において Rayleigh 波を記述する漸近解の正当性を証明し, 境界表面での Rayleigh 波解の変位(Dirichlet データ)と表面力(Neumann データ)との線形関係をあらず surface impedance matrix の構造を精査し, Rayleigh 波速度の分散公式導出を行う. 弾性テンソル(残留応力項を含む)の不均質性と非等方性が Rayleigh 波速度の分散に及ぼす影響を, 弾性テンソルの成分ごとにまで掘り下げて吟味していく. 弾性波動方程式は多くのパラメータを含む複雑な方程式系であるため, 漸近展開式, 摂動公式の導出, 再構成アルゴリズムの構築の際には, 数式処理と数値計算を随時援用する.

2 田沼一実・C.-S.Man(海外共同研究者)...平成 22 年 5 月 12~15 日に, 中国・杭州で行われる国際会議 3rd International Conference on Dynamics, Vibration and Control に研究打ち合わせと研究経過報告のため出席する. また同国際会議に参加の C.-S.Man 氏と, 弾性波の分散の観測から弾性テンソルを同定する逆問題について研究討論を行う. 平成 23 年の 3 月と 9 月には, C.-S.Man 氏を米国 Kentucky 大学に訪問し, 弾性波の分散の観測から弾性テンソルを同定する逆問題について研究討論を行う. また横等方弾性体の複合材料に残留応力が含まれた場合の構成方程式と, 摂動公式について資料収集と討論を行う.

3 平成 23 年 12 月に, フィンランド・日本・韓国連合逆問題ワークショップがヘルシンキで開催される. 研究代表者は非等方弾性体における弾性表面波の漸近挙動と逆問題について討論と発表を行う.

#### (2) 平成 24 年度~25 年度

1 残留応力項のついた非等方弾性体の具体例に対して, 弾性テンソルの非等方性と不均質性が, 表面波および界面波の伝播速度の摂動・分散に及ぼす影響を, 弾性テンソルの成分ごとに精査していく. 摂動・分散公式の各項は, 多くのパラメータと計算ステップを含

むたいへん複雑な形になると予想されるが, 摂動・分散公式における各弾性テンソルの寄与の法則性を見出すことにつとめる. 一方逆問題において, 非等方性・不均質性を有する弾性テンソルを摂動・分散公式の各項から再構成していくことは難しいと予測される. そこで弾性テンソルから摂動・分散公式の各項を求める順問題の具体的手順を数式処理で与え, その上で予測初期値から順問題を数値的にくり返し解いて, 弾性テンソルの最適解を求める再構成アルゴリズムを完成させることを目標とする. 連携研究者の中村玄とは, 分散公式の正当性と応用について考察を行う.

2 田沼一実・C.-S.Man .....平成 24 年 9 月と平成 25 年 3 月に, C.-S.Man 氏を米国 Kentucky 大学に訪問し, 弾性波の伝播速度の観測, さらには分散現象の観測の実情を相互理解し, 表面波と界面波の摂動・分散についての計算結果と, 弾性テンソルの非等方性と不均質性および残留応力を再構成する逆問題について研究成果の取りまとめを行う.

3 平成 25 年 4 月に台湾学術研究院数学研究所にて, 研究集会「Workshop on Boundary Phenomena for Evolutionary Partial Differential Equations」(発展形偏微分方程式の解の境界挙動に関する研究集会)が開催されるが, そこにおいて研究代表者は, 弾性表面波の摂動と分散, 弾性界面波の摂動について研究成果を発表する.

### 4. 研究成果

(1) 弾性テンソルが自由境界面から深さ方向に変化する不均質弾性体において, Rayleigh波の自由境界面での位相速度に対して, 高周波漸近展開公式(分散公式)を導出した. 具体的にはまず, Rayleigh波速度が, 境界表面でのRayleigh波解の変位(Dirichlet データ)と表面力(Neumannデータ)との線形関係をあらず行列surface impedance matrixの特異点となる事実を鑑み, surface impedance matrixは, 各項がエルミート行列の高周波漸近展開を有することを示した. このことは, 求めるRayleigh波が弾性テンソルの摂動に関して安定に存在することを保証する. とくに第一項は, 弾性テンソルを境界表面での値に固定してできる斉次非等方弾性体の surface impedance matrixに対応する. つぎに, surface impedance matrixの漸近展開式の第 2 項以下に対しても, 第 1 項と弾性テンソルの非等方成分の法線微分をもちいて, 線

形方程式系の求解に帰着することで帰納的に求める手続きを与えた。最後に surface impedance matrix の特異点を計算し、Rayleigh波速度の高周波漸近展開式(分散公式)を導出した。以上の結果は、いまだ完成されていない非等方性弾性体におけるRayleigh波分散の厳密な数学解析に寄与するものであり、応用解析分野の学術論文誌( [雑誌論文] の1 )に掲載予定である。一方逆問題において、非等方性・不均質性を有する弾性テンソルを摂動・分散公式の各項から直に再構成していくことは、非等方弾性体の複雑さから到底望めない。そこで弾性テンソルから Rayleigh波の位相速度を決定する順問題を予測初期値から数値的にくり返し解いて、弾性テンソルの最適解を求めるアルゴリズムが望まれる。逆問題を解くこのような見地からも、Rayleigh波の位相速度に対する精密な順問題解析が重要となる。本研究結果はこのアプローチに込めるものであり、今後の展望としては、得られた精密な順問題解析を、個々の代表的な非等方弾性体に適用し、分散現象の観測から弾性テンソルの非等方性・不均質性を同定する逆問題に対する数学解析を計画している。

(2) 個々の弾性体材料は等方的であっても、それらを組み合わせた複合材料は容易に非等方性を有し、その性質を我々の生活に役立っている例は多い。たとえば向きづけられたファイバーで補強された複合材料は、強い非等方性をもった横等方弾性体となる。その表面を伝播する Rayleigh 波の位相速度は代数方程式を解くことで比較的容易に得られるが、ではファイバーの方向が既知なものからほんの少しずれた場合に Rayleigh 波の位相速度はどのように摂動するか、あるいは既知の横等方弾性体に微少な残留応力が加わった場合、位相速度はどのような影響を受けるか、という問題をモデルに、本研究では直交異方性弾性体(横等方弾性体を含む、より広い非等方弾性体の典型例)から微少な弾性テンソルが摂動した場合、および微少な残留応力が発生した場合に、弾性体の自由境界面近傍を伝播する表面波(Rayleigh 波)の位相速度が、直交異方性弾性体のときの速度からどのように変化するかを公式として提示した。具体的には、弾性テンソルの直交異方型テンソルからの摂動部分と残留応力テンソルの各成分が、Rayleigh 波の位相速度の一次摂動にどのように寄与するかを明示した。一方、弾性体の性質が未知のとき、自由

境界表面上での Rayleigh 波の挙動を調べることで、弾性体の非等方性、不均質性を決定することは、材料力学、地球物理学での重要な逆問題であるが、この具体例として本研究では、前述の一次摂動公式をもちい、横等方弾性体の等方面を伝播する Rayleigh 波の速度から、摂動として与えた残留応力の主軸方向、およびその残留応力の主応力差と主応力差を決定する逆問題アルゴリズムを提示した。これは、研究の目的(3)の再構成アルゴリズムの第一段階となる。以上の結果は数学・力学分野の学術論文誌( [雑誌論文] の2, 3 )に掲載された。

(3) 異なる2つの半無限非等方弾性体が界面をとおして接続されているとき、界面の近傍では、界面から両法線方向に指数減衰する亜音速の界面波(Stoneley 波)が存在する。両側の斉次弾性テンソルの非等方成分(残留応力項も含む)が、界面波の伝播速度にどのような摂動を及ぼすかを一次摂動公式にて表現した。以上の結果を[学会発表]の2, 3にて報告した。また同結果は、界面波の挙動から2つの弾性体を接続することで界面近傍に発生した残留応力を決定する逆問題を解析していくための基礎となる。一方、界面の境界条件によっては他種類の界面波が生じ、その伝播速度が周波数に依存する分散現象も起こりうる。今後の展望としては、本研究の結果を基礎に逆問題への応用も見据え、界面の様々な境界条件の下で、摂動公式、分散公式を求める統一的解析手法を確立することを計画している。なお本研究は、当初の研究の目的(2)における、介在物を内部に含む弾性体表面を伝播する Rayleigh 波の分散公式導出の困難さが、弾性テンソルが任意形状に不連続であることに因ると予想されたので、まずは、弾性テンソルが層状に(境界面に対して法線方向に)不連続という設定の下で摂動公式を求めるとい、研究期間中にあらたに提起した問題に対応するものである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1. Chi-Sing Man, Gen Nakamura, Kazumi Tanuma and Shengzhang Wang, Dispersion of Rayleigh waves in vertically-inhomogeneous prestressed

- elastic media, IMA Journal of Applied Mathematics (in press) DOI: 10.1093/imamat/hxt025 (査読有り).
2. Kazumi Tanuma and Chi-Sing Man, Propagation of Rayleigh waves in anisotropic media and an inverse problem in the characterization of initial stress: in Mathematical Methods and Models in Composites, V. Mantic (ed.), Imperial College Press, World Scientific (2013) (ISBN: 978-1-84816-784-1), 209-246 (査読有り).
  3. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man and Wenwen Du, Perturbation of phase velocity of Rayleigh waves in pre-stressed anisotropic media with orthorhombic principal part, Mathematics and Mechanics of Solids, **18**, 301-322 (2013) (査読有り).
  4. Gen Nakamura, Paivi Ronkanen, Samuli Siltanen and Kazumi Tanuma, Recovering conductivity at the boundary in three-dimensional electrical impedance tomography, Inverse Problems and Imaging, **5**, 485-510 (2011) (査読有り).

[学会発表](計12件)

1. Kazumi Tanuma, Perturbation and Dispersion of Rayleigh Waves in Prestressed Anisotropic Elastic Media, Inverse Problems Seminar, Finnish Inverse Problems Society, 2014年3月24日, University of Helsinki, Helsinki, Finland
2. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man and Wenwen Du, Perturbation of Rayleigh waves and interfacial waves in anisotropic elastic media, Workshop on Boundary Phenomena for Evolutionary Partial Differential Equations (招待講演), 2013年4月19日, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan
3. 田沼一実, 非等方弾性体における Stoneley 波速度の摂動, 第62回理論応用力学講演会, オーガナイズドセッション: 波動現象の数理とその応用, 2013年3月7日, 東京工業大学, 東京
4. 田沼一実, 非等方弾性体における Rayleigh waves および interfacial waves の位相速度の摂動, 現象解析特別セミナー第3回, 2013年3月2日, 群馬大学工学部, 桐生
5. Kazumi Tanuma, Dispersion of Rayleigh waves in vertically-inhomogeneous prestressed elastic media, Seminar in mathematics of materials, 2012年9月28日, University of Kentucky, Lexington アメリカ合衆国
6. 田沼一実, 直交異方性弾性体からの Rayleigh 波および Stoneley 波の位相速度の摂動, 日本数学会秋季総合分科会・応用数学分科会, 2012年9月21日, 九州大学大学院数理学研究院, 福岡
7. 田沼一実, 直交異方性弾性体からの Rayleigh 波速度の摂動, 数理科学セミナー, 2012年3月11日, 同志社大学, 京都
8. 田沼一実, Chi-Sing Man and Wenwen Du, 直交異方性弾性体からの Rayleigh 波速度の摂動, 第61回理論応用力学講演会, オーガナイズドセッション: 波動現象の数理とその応用, 2012年3月9日, 東京大学生産技術研究所, 東京
9. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man and Wenwen Du, Perturbation of phase velocity of Rayleigh waves in anisotropic elastic media with orthorhombic principal part, Finnish-Japanese-Korean Workshop on Inverse Problems, 2011年12月13日, University of Helsinki, Helsinki, Finland
10. Kazumi Tanuma, Perturbation and dispersion of phase velocity of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media, 数理科学セミナー, 2010年9月20日, 大阪電気通信大学, 大阪府寝屋川市
11. 田沼一実, Chi-Sing Man, Gen Nakamura, and Shengzhang Wang, Dispersion of phase velocity of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media, 京都大学数理解析研究所 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究」, 2010年6月23日, 京都大学, 京都
12. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man, Gen Nakamura, and Shengzhang Wang, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media, The Third

International Conference on Dynamics,  
Vibration and Control, 2010年5月13  
日, 杭州大学, 杭州市, 中国

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田沼 一実 (TANUMA Kazumi)  
群馬大学・理工学研究院・准教授  
研究者番号: 60217156

(2) 連携研究者

中村 玄 (NAKAMURA Gen)  
韓国・仁荷大学・数学科・教授 (平成 25  
年 3 月より)  
北海道大学・理学研究科・教授 (平成 25  
年 2 月まで)  
研究者番号: 50118535

(3) 海外共同研究者

Chi-Sing Man  
アメリカ合衆国・ケンタッキー大学・  
数学科・教授