

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540115

研究課題名(和文) 確率微分方程式の高次近似理論とそのファイナンスへの応用

研究課題名(英文) Higher Order weak approximation of Stochastic Differential Equations with application to finance

研究代表者

二宮 祥一 (Ninomiya, Syoiti)

東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・教授

研究者番号：70313377

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：確率微分方程式(以下SDE)の高次弱近似を実現するアルゴリズムと理論に関するものである。以下の5点の成果を得た。[1]バリア型の金融派生商品への楠岡近似アルゴリズムの拡張。[2]我々の楠岡近似のアルゴリズムの計算機プログラムライブラリの完成。[3]SDEの7次の弱近似(通常の意味では3次)を実現する新しい近似アルゴリズムの発見。[4]ファイナンスに於いて重要であるHeston Modelに我々のアルゴリズムの一つ(所謂NNアルゴリズム)を適用する際に更に高速化を可能とするような変数変換手法の発見。[5]高頻度取引の分野で情報に時差がある場合にそれを検出する指標を新たに発見。

研究成果の概要(英文)：The following 5 results are achieved: [1] A new higher order algorithm for pricing barrier-type derivatives is found. [2] A computer program library of Kusuoka approximation for general SDEs are constructed and made public. [3] A new family of stochastic variables that enables 7th order weak approximation is constructed. [4] A new variable transformation method for Heston stochastic volatility models found. The transformed Heston model can be calculated faster by the NN algorithm. [5] A new index process from which we can detect lead/lag relations between two stochastic processes is constructed. Results [1][2] and [3] are expected from the beginning of this research project. [4] and [5] are the spin-offs of the main project.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含む確率論)

キーワード：確率微分方程式 弱近似 シミュレーション 数理ファイナンス 金融派生商品 高頻度取引 数値計算

1. 研究開始当初の背景

確率微分方程式(以下SDE)で記述される拡散過程 $X(t)$ と或る関数 f が与えられているとき期待値 $E[f(X(T))]$ を数値的に求める事をこのSDEの弱近似問題と謂う。この問題は近年、特に金融産業に於いて日々大量に行われるようになったために重要な問題であると考えられるようになってきている。SDEの弱近似の方法には確率論的手法(シミュレーション法)と偏微分方程式に帰着させる手法とがあり両者とも実務に於いて使用されており重要である。シミュレーション法を用いる場合にはまず対象となるSDEを時間方向に離散化して有限次元に帰着させる。この手順では通常 Euler-丸山近似と呼ばれる方法が用いられてきた。この方法は離散化誤差が離散化幅について一次であるという意味で一次近似である。ここで高次の離散化を行なうことができればその後の数値積分の積分領域の次元を下げる事が可能となる。近年この数値積分に準モンテカルロ法を用いる事が主流となりつつあるがこの場合積分領域の次元が小さくなると必要な計算量が劇的に減少し計算速度が大きく向上する。然しながら一般のSDEに対し高次の離散化を現実的に行なうのは不可能であった。その理由は(R1)伊藤-テイラー展開を形式的に適用してもブラウン運動の反復積分が多数現われその同時分布は未だに未知である。および(R2)膨大な記号計算があらわれる。このような背景の下、報告者等は楠岡によって確立されたSDEの高次離散化の手法[K](楠岡近似)を実現するアルゴリズムを自由リー環に値を取る確率変数を具体的に構成するという方法で実現することに成功した[N1][N2]。この手法の有用性は直ちに認められ、報告者等の方法に基いた新たな研究が成されている。

[K] Shigeo Kusuoka, "Approximation of expectation of diffusion process and mathematical finance", Adv. Stud. Pure Math., 31 (2001), pp. 147-165

[N1] Syoiti Ninomiya and Nicolas Victoir "Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing", Applied Mathematical Finance, vol. 15, No. 2, pp. 107-121 (April 2008)

[N2] Mariko Ninomiya and Syoiti Ninomiya, "A new higher-order weak approximation scheme of stochastic differential equations and the Runge-Kutta method" (with Mariko Ninomiya), Finance and Stochastics vol. 13, No. 3 (September, 2009), pp. 415-443.

2. 研究の目的

本研究の目的は報告者が発見したSDEの楠岡近似の手法を以下の観点において発展させることである。この目的の為に課題として以下の三つ:(S1)経路依存型の金融派生商

品の計算に現われるような場合への手法の拡張,(S2)実務家や研究者が容易に本手法を用いることができるようにするための計算機プログラムライブラリの開発(S3)さらに近似の次数を上げたアルゴリズムの構成の研究、を取り上げることとする。

3. 研究の方法

(S1)については理論的にはどのようにすべきかが略わかってきたので数値的な実験と並行して理論の確立と実用的な有用性の検証の両方を行う。(S2)については現在までに確立されている範囲についてのライブラリ化をまずは行ない、追って研究用に更に抽象化した部分のライブラリ化を目指す。(S3)についてはブラウン運動の反復積分同士の関係を調べるという方法、および nilpotent な自由リー環に対応する自由リー群の構成方法を調べるという方法でアプローチする。

4. 研究成果

(S1)についてはBarrier型と呼ばれる経路依存型オプションについて2/3次の近似を可能にするアルゴリズムおよび特定の問題に対してそれを更に1/2次向上させるアルゴリズムを構築した。2/3次のアルゴリズムに関しては[KNN]で数値実験とともに報告した。後者については[N3]の中で報告した。これらの数値実験の中で解明すべき現象が現われた為、現在これの研究をつづけているところである。以上の結果をまとめて投稿する予定である。(S2)については二宮真理子氏と共同でまずは実務家向けのC言語によるプログラムライブラリを開発した。これらのライブラリについては二宮真理子により[M1][M2]で公表された。現在はこのライブラリをさらに抽象化してより多くのパラメータを可変としたものに改良している段階である。(S3)に関しては2次元の標準ブラウン運動と7次まで同じ振舞いをするような確率変数(7次積率一致族)を学生とともに構成した。このとき、自由リー環の基底に対して独立した確率変数を割り当てる、という方針で構成に臨んだところ上手く構成ができた。この結果を[N4]で報告した。現在はこの構成が成功した理由の解明を目標に理論研究をしているところである。

以上は研究開始当初の計画の中である程度予想されていた成果であるがこれら以外に予想外の副産物として以下の様な成果を得た。近年、金融市場の取引の大部分は計算機プログラムによって自動的に行なわれるようになってきており、これらは高頻度取引と呼ばれ重要な研究対象と考えられる。報告者らは高頻度取引を念頭に複数資産の間に時間的な「進み」「遅れ」の関係がある場合に有効な指標の有力な候補を発見した。これは本研究計画の本来の目的である高次離散近似の理論において2次の近似を支配する本質的な量であるレヴィの確率面積と同

じものである。現在、実際の市場データをも用いてこの指標の有用性を確認できたところである。この結果については[N5]で報告した。

[KNN] Shigeo Kusuoka, Mariko Ninomiya, Syoiti Ninomiya, "APPLICATION OF THE KUSUOKA APPROXIMATION TO BARRIER OPTIONS", CARF-F-277, CARF F-Series from Center for Advanced Research in Finance, Faculty of Economics, The University of Tokyo

[M1] Mariko Ninomiya "SDE WEAK APPROXIMATION LIBRARY (SDE WA) (VERSION 1.0)", CARF-F-274, CARF F-Series from Center for Advanced Research in Finance, Faculty of Economics, The University of Tokyo

[M2] Mariko Ninomiya, "A program library for numerical calculation of the Kusuoka approximation and tutorials of use", CARF セミナー, 東京大学金融教育研究センター, 2011年12月1日

[N3] Syoiti Ninomiya, "On the higher-order weak approximation of SDEs", The third workshop on numerical methods for solving the filtering problem and high order methods for solving parabolic PDEs, 2012/9/24--28, (Oxford, UK)

[N4] Syoiti Ninomiya, "楠岡近似に現われる確率変数族の構成について", 第三回数理ファイナンス合宿型セミナー, 於 熱海ホテル ニューアカオ, (2014/1/24--26)

[N5] Syoiti Ninomiya, "Estimating the lead/lag between asset price processes -- a new approach (1)", 金融リスクの計測・管理・制御と資本市場に纏わる諸問題 (ワークショップ), 於 大阪大学金融・保険教育研究センター, (2014/3/13--14)

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 10 件)

1. Syoiti Ninomiya, "Estimating the lead/lag between asset price processes -- a new approach (1)", 金融リスクの計測・管理・制御と資本市場に纏わる諸問題 (ワークショップ), 於 大阪大学金融・保険教育研究センター, (2014/3/13--14)
2. Syoiti Ninomiya, "楠岡近似に現われる確率変数族の構成について", 第三回数理ファイナンス合宿型セミナー, 於 熱海ホテル ニューアカオ, (2014/1/24--26)
3. Syoiti Ninomiya, "On the higher-order weak approximation of SDEs", The third workshop on numerical methods for solving the filtering problem and high order methods for solving parabolic PDEs, 2012/9/24--28, (Oxford, UK)
4. Syoiti Ninomiya, "A new semi-closed form solutions to some financial problems: a note on Bayer-Friz-Loeffen's work" (with Yusuka Kubo), Rough Paths and PDEs, 2012/8/19--25, (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany)
5. Syoiti Ninomiya, "QMC and Higher order methods for SDEs", Workshop for Quasi-Monte Carlo and Pseudo Random Number Generation, 2012/6/12--13, (University of Tokyo, Japan)
6. Syoiti Ninomiya, "The higher-order weak approximation algorithms for SDEs" (with Shigeo Kusuoka and Mariko Ninomiya), The second workshop on numerical methods for solving the filtering problem and high order methods for solving parabolic PDEs, 2011/9/26--29, (Imperial College, London, UK)

7. Syoiti Ninomiya, ``Some trials on extending the higher-order weak approximation algorithms for SDEs" (with Shigeo Kusuoka and Mariko Ninomiya), Workshop rough paths and numerical integration methods, 2011/9/21---23, (Philipps Universitat, Marburg, Germany)
8. Syoiti Ninomiya, ``Higher-order weak approximation algorithms for SDEs: Some trials on barrier option problem and higher order algorithms" (with Shigeo Kusuoka and Mariko Ninomiya), Stochastic PDEs, 2011/9/12---16 (ETH Zurich, Zurich)
9. Syoiti Ninomiya, ``On an extension of an algorithm of higher-order weak approximation to SDEs,"(with Mariko Ninomiya), CREST and Sakigake International Symposium: Asymptotic Statistics, Risk and Computation in Finance and Insurance, 2010/12/14---18 (Tokyo Institute of Technology, Ookayama, Tokyo)
10. Syoiti Ninomiya, ``On an extension of a higher-order weak approximation method for SDEs," (with Mariko Ninomiya), Workshop on numerical methods for solving the filtering problem and high order methods for solving parabolic PDEs, 2010/9/27---29 (Imperial College, London)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：

出願年月日：
 国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：
 国内外の別：

〔その他〕
 ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

二宮 祥一 (Ninomiya, Syoiti)
 東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・教授
 研究者番号：70313377

(2)連携研究者

楠岡 成雄 (Kusuoka, Shigeo)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号：00114463

(3)連携研究者

中野 張 (Nakano, Yumiharu)
 東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・准教授
 研究者番号：00452409