様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２４日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２０１０ ～ ２０１２
課題番号：２２５４０１１６
研究課題名（和文）　様々な偏微分方程式に対する代用電荷法の数理とその応用に関する研究

研究課題名（英文）　Mathematics and applications of the charge simulation method for various partial differential equations

研究代表者
緒方　秀教（OGATA HIDENORI）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科
研究者番号：５０２４２０３７

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，偏微分方程式の数値解法である代用電荷法（基本解近似解法）の数理的性質を調べることである．研究の成果は以下のとおりである．(1)２次元円板外部領域における波動問題（Helmholtz 方程式問題）に対する代用電荷法の理論誤差評価を得た．(2)２次元 Jordan 領域におけるポテンシャル問題に対する代用電荷法不変スキームに対する収束定理を提示した．さらに本研究では，ポテンシャル問題に対する「双極子法」を提案した．これは，従来の代用電荷法のように点電荷ポテンシャルを用いる代わりに双極子ポテンシャルの重ね合わせで解を近似する方法である．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to investigate the mathematical properties of the charge simulation method (the method of fundamental solutions), which is a numerical solver for partial differential equations. The results of the study are as follows. (1) We obtained a theoretical error estimate of the charge simulation method applied to two-dimensional wave problems (Helmholtz equation problems) in the exterior region of a disk. (2) We presented a convergence theorem of the invariant scheme of the charge simulation method for two-dimensional potential problems in Jordan regions. Besides, we proposed a dipole simulation method for potential problems, where the solutions are approximated by linear combinations of potentials due to dipoles instead of point charges as in usual charge simulation method.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２０１２年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：数値数学

１．研究開始当初の背景

科学技術計算において偏微分方程式の数値解法は重要な問題である．本研究では，偏微分方程式の数値解法のひとつである代用電荷法を扱う．これは偏微分方程式の基本解の一次結合で解を近似する方法であり，元来，電気力学・流体力学などにおけるポテンシャル問題（Laplace 方程式の数値解法）として

用いられてきた．

２次元ポテンシャル問題

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } D \\ u = f & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の場合について具体的に記すと，近似解は

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u_N(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|$$

（Q_j は電荷と呼ばれる実数係数，$\boldsymbol{\xi}_j$ は電荷点と呼ばれる問題領域 D 外部の点）と表される．近似解は問題領域で Laplace 方程式を厳密に満たし，境界条件

については，拘束条件

$$u_N(\boldsymbol{x}_i) = f(\boldsymbol{x}_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

（$\boldsymbol{x}_i$ は拘束点と呼ばれる境界点）により電荷を選んで，近似的に満たすようにする．物理的に言えば，点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解であるポテンシャルを近似するのである．

このように代用電荷法は素朴な解法であり，計算の手間が少ない一方，ある条件下では点数 N に対し誤差が指数関数的に減衰するという高精度を達成する．このことから代用電荷法は，ポテンシャル問題に限らず，波動問題，流体問題，弾性問題など幅広い分野で用いられてきた．

一方，理論誤差評価など数理解析については，２次元ポテンシャル問題問題などごく限られた場合にしか行われておらず，電荷点・拘束点配置などは試行錯誤に頼らざるを得なかった．そのため，代用電荷法の数理的性質の解明が望まれていた．

２．研究の目的

本研究は，様々な偏微分方程式問題に対して代用電荷法の数理的性質を理論・数値実験の両面から調べることを目的とする．具体的には次の項目を研究目的とする．

(1) ２次元波動問題に対する代用電荷法の数理的性質を調べる．この問題は数学的には２次元 Helmholtz 方程式 $\triangle u+k^2u=0$（k は波数に相当する正定数）の境界値問題で与えられ，代用電荷法の近似解は次式で与えられる．

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} Q_j H_0^{(1)}(k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|)$$

（Q_j は複素係数，$H_0^{(1)}(\cdot)$ は 0 次の第１種 Hankel 関数）．これは物理的には，点 $\boldsymbol{\xi}_j$ を波源とする２次元球面波の重ね合わせで波動関数 $u(x)$ を近似することに相当する．この近似について，誤差評価などの数理的性質を理論・数値実験の両面から調べる．

(2) 前項の 2 次元波動問題に対する代用電荷法の性質に対し，2 次元ポテンシャル問題の代用電荷法について従来知られている理論結果との比較・検証を行う．実は，2 次元ポテンシャル問題の理論解析と同様の結果が他の様々な２次元偏微分方程式に対して成り立つことが数値実験によりわかっており，その結果を理論的に裏付ける．

(3) なお，研究当初の目的には，3 次元偏微分方程式問題に対する代用電荷法の数理的研究，および，代用電荷法ソフトウェアの開発も含まれていた．

３．研究の方法

(1) 2 次元波動問題に対する代用電荷法の数理的性質（誤差評価など）を，理論・実験の両面から調べる．本研究で扱う問題は外部単連結領域 D における Helmholtz 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} \triangle u + k^2 u = 0 & \text{in } D \\ u = f & \text{on } \partial D \\ \displaystyle\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}ku\right) = 0 & \end{cases}$$

または Neumann 境界値問題

$$\begin{cases} \triangle u + k^2 u = 0 & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \partial D \\ \displaystyle\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}ku\right) = 0 & \end{cases}$$

である．本研究ではとくに，一番簡単かつ基本的な問題である円板外部領域

$$D = D_\rho = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x}\| > \rho \right\}$$

の問題を扱う．この場合，拘束点 $\boldsymbol{x}_i$，波源点 $\boldsymbol{\xi}_j$ は等間隔同位相点配置，すなわち，次のように円境界と同心円上に等間隔にとるのが自然である．

$$\boldsymbol{x}_i = \rho\left(\cos\frac{2\pi i}{N}, \sin\frac{2\pi i}{N}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

$$\boldsymbol{\xi}_j = q\rho\left(\cos\frac{2\pi j}{N}, \sin\frac{2\pi j}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

ここで，q は $0<q<1$ と呼ばれる定数で，assignment parameter と呼ばれる．このとき，誤差$=O(q^N)$となることが数値実験でわかっている．本研究ではこれを理論的に証明する．なお，この誤差評価はポテンシャル問題に対する代用電荷法と同じであり，ポテンシャル問題に対する場合と同様の代用電荷法の性質が円板外部波動問題についても成り立つことが，この研究で示されることになる．

(2) 本研究では様々な２次元偏微分方程式に対する代用電荷法の基本的性質を，理論・実験両面から調べる．とくに円板（外部）問題では，assignment parameter を q とする等間隔同位相点配置を用いると誤差$=O(q^N)$というポテンシャル問題と同様の結果を得るこ

とが様々な偏微分方程式問題について実験的にわかっており，これを理論的に証明する．また，一般領域問題についても同様の研究を，ポテンシャル問題に対する代用電荷法の手法がどれだけ使えるかに注意しながら行う．

４．研究成果

(1) 平成２２年度は，円板外部領域問題における２次元波動問題，すなわち，Helmholtz 方程式の Dirichlet 境界値問題に対し，代用電荷法の誤差評価を理論・実験の両面から調べた．その結果，拘束点・波源点を assignment parameter を q とする等間隔同位相にとった場合，境界データが解析的であるならば，代用電荷法の誤差は $O(q^N)$となることがわかった．これは，２次元円板外部領域のポテンシャル問題に対する代用電荷法についてすでに知られている理論誤差評価と同じ収束率であるという点で，理論的に興味深い結果である．そして，代用電荷法の応用の際重要である拘束点・波源点の配置の仕方について重要な知見を与える．この研究成果は，論文③および学会口頭発表⑦，⑨，⑩，⑪で公表した．

(2) 平成２３年度は，２次元波動問題に対する代用電荷法について，特に円板外部 Neumann 境界値問題について改良した理論誤差評価を得た．さらに，代用電荷法の近似解を波動関数の解に対する補間公式とみなすと，理論的にはほぼ最適な補間公式であることを示した．この結果は，２次元円板領域ポテンシャル問題に対する代用電荷法の近似解が，同領域における調和関数の補間としてほぼ最適であるという先行研究結果の拡張であり，代用電荷法が様々な偏微分方程式の近似解法として精度が良いことを理論的に示唆するものである．この結果は，学会口頭発表⑦，⑨，⑩で公表し，現在論文発表の準備中である．

　同年度はまた，２次元ポテンシャル問題に対し，電気双極子を用いた代用電荷法を提案した．この方法は，従来のように点電荷ポテンシャルを使う代わりに，電気双極子ポテンシャルの重ね合わせで解を近似する．具体的には，２次元平面領域 D における Laplace 方程式$\triangle u=0$ に対し，

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_j\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_j)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_j\|^2}$$

（$\boldsymbol{p}_j$は双極子モーメントに相当する定数ベクトル，$\boldsymbol{\xi}_j$ は問題領域 D 外部の点）と解を近似する．さらに，この方法を数値等角写像にも応用した．これはポテンシャル問題に対する新しいタイプの代用電荷法の数値解法であり，従来の方法に比べてより性質の良い近似解を与える可能性が期待される．

　図１に，円板領域

$$\Omega_\rho = \left\{\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\| < \rho \,\right\}$$

におけるポテンシャル問題

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \Omega_\rho \\ u = x^2 - y^2 & \text{on } \partial\Omega_\rho \end{cases}$$

に対する双極子法の誤差を示す．ここで，拘束条件に用いる拘束点 $\boldsymbol{x}_i$ および双極子を置く点 $\boldsymbol{\xi}_j$ は次のようにとっている．

$$\boldsymbol{x}_i = \rho\left(\cos\frac{2\pi i}{N}, \sin\frac{2\pi i}{N}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

$$\boldsymbol{\xi}_j = \sigma\rho\left(\cos\frac{2\pi j}{N}, \sin\frac{2\pi j}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

ここで，σはσ>1 なる定数である．

　この研究結果は，論文（査読なし）②および学会口頭発表③，④，⑧で公表し，現在査読付き論文誌に投稿中である．

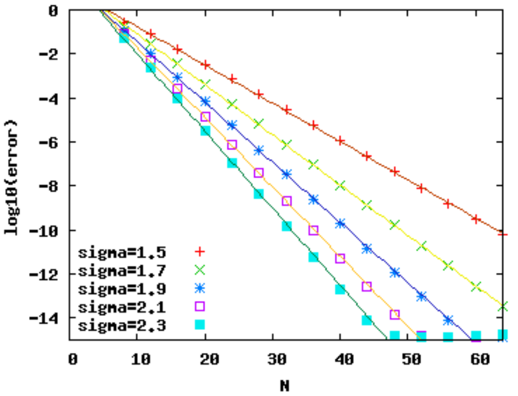

図 1：2 次元ポテンシャル問題に対する双極子法の誤差

　また，当年度は，２次元波動問題に対する代用電荷法の高速多重極展開および GPU コンピューティングによる高速計算（学会口頭発表⑤），および，波動逆問題の代用電荷法による解法（学会口頭発表⑥）という研究成果も得た．

(3) 平成２４年度は，一般の２次元領域におけるポテンシャル問題に対する代用電荷法不変スキーム，すなわち，座標のスケール変換および境界値の原点移動に対し不変なスキームに対し，拘束点・電荷点の有効な配置の仕方および近似解の収束を理論的に示した．具体的には，円板外部領域を問題領域外部に写す等角写像を用いて拘束点・電荷点を配置するとよい．詳しく述べると，問題領域を D として，円板 D_ρ外部から問題領域 D 外部への等角写像 Ψを考える（図２参照．ここでは２次元 Euclid 平面と複素平面とを同一視する．等角写像の存在は，Riemann の写像定理により保証されている）．等間隔同位相の

点 $\rho\omega^j$,　　　　$\sigma\rho\omega^j$(j=0,1,⋯,N-1; ω=exp(2πi/N); σ>1)をとり，それらの等角写像による像$\Psi(\rho\omega^j)$，$\Psi(\sigma\rho\omega^j)$をそれぞれ拘束点・電荷点に用いるのである．その場合，境界データが解析的であるならば，代用電荷法は拘束点・電荷点の数を増やすにつれて真の解に指数関数的に収束することを示した．この結果は，代用電荷法の古典スキーム，すなわち，不変スキームのような不変性を持たない従来のスキームに対しては桂田がすでに示しており，本研究の結果はこれを不変スキームに拡張したものである．さらに，不変スキームの場合，古典スキームの場合の理論的収束定理で要求されている物理的に不自然な幾何学的仮定が不要であることがわかった．代用電荷法不変スキームについては，円板領域問題に適用した場合に対しては理論的解析が詳細に行われており，その有用性が示唆されていたが，本研究結果から同スキームは一般の領域の問題に対して有用であり，古典スキームに対する優越性が示された．本研究結果は論文誌投稿中であり，学会口頭発表①，②，③にて公表された．

また当年度は天野らとの共同研究により，多重連結領域から平行スリット領域への等角写像に対する代用電荷法による近似計算法を考案し，論文①で公表した．

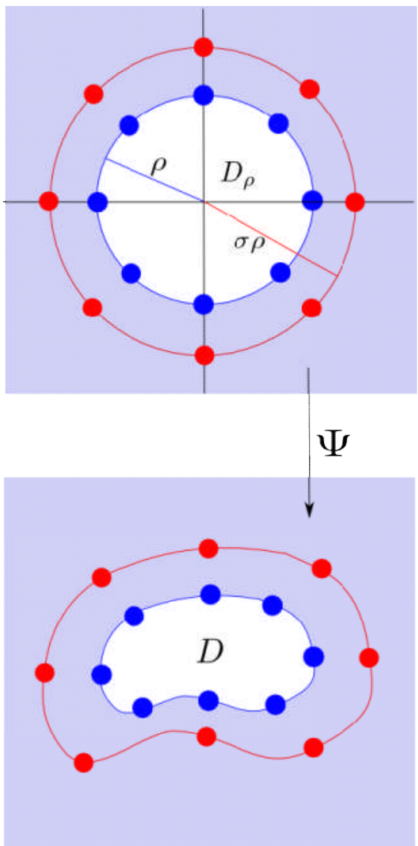

図２：等角写像による拘束点・電荷点の配置．●を拘束点，●を電荷点に用いる．

(4) 当初の研究目的にあった３次元問題に対する代用電荷法の研究および代用電荷法ソフトウェアの開発は，この研究で遂行することができなかった．これは，当初の研究目的になかった「双極子法」を思いつきその研究に時間を割いたことが理由である．さらに，３次元問題の場合は２次元の場合に比べて数理的解析が格段に難しいことも理由である．無理のない研究計画を立てるべきであったというのが反省点である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① K.Amano, D.Okano, H.Ogata and M.Sugihara, Numerical conformal mappings onto the linear slit domain, Japan J. Indust. Appl. Math., 査読有, Vol.29, 2012, 165-186.

② 緒方秀教：電気双極子代用電荷法と数値等角写像への応用，京都大学数理解析研究所講究録，査読無，No.1791，2012，97-106.

③ H.Ogata, F. Chiba and T.Ushijima, A new theoretical error estimate of the method of fundamental solutions applied to reduced wave problems in the exterior region of a disk, J. Comput. Appl. Math., 査読有, Vol.235, 2011, 3395-3412.

④ H.Ogata and K. Amano, Fundamental solution method for two-dimensional Stokes flow problems with one-dimensional periodicity, Japan J. Indust. Appl. Math., 査読有, Vol.27, 2010, 191-215.

〔学会発表〕（計１１件）

① 緒方秀教，桂田祐史，一般 Jordan 領域のポテンシャル問題に対する代用電荷法不変スキームの収束定理，応用数学合同研究集会，龍谷大学瀬田キャンパス，大津，2012 年 12 月．

② H.Ogata and M.Katsurada, Convergence of the invariant scheme of the method of fundamental solutions for two-dimensional potential problems in a Jordan region, New Zealand Mathematical Society Colloquium 2012, Massey University, Palmerston North, New Zealand, December 2012.

③ 緒方秀教，２次元ポテンシャル問題に対する双極子法における点配置について，日本応用数理学会 2012 年度年会，稚内全日空ホテル，稚内，2012 年８月．

④ 緒方秀教，ポテンシャル問題に対する双極子法の検証，JSIAM2012（日本応用数理学会）研究部会連合発表会，九州大学，福岡，2012 年 3 月.

⑤ 藤原弘樹，緒方秀教，代用電荷法への高速多重極展開の適用と GPU による高速化，JSIAM2012（日本応用数理学会）研究部会連合発表会，九州大学，福岡，2012 年 3 月.

⑥ 藤井祐輔，緒方秀教，代用電荷法による波動逆問題の解法，JSIAM2012（日本応用数理学会）研究部会連合発表会，九州大学，福岡，2012 年 3 月.

⑦ H.Ogata and M.Sugihara, Theoretical error estimate and near optimality of the method of fundamental solutions for the two-dimensional Helmholtz equation in the exterior region of a disk, International Conference WI&E (Waves in Science and Engineering), Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico, November 2011.

⑧ 緒方秀教，電気双極子代用電荷法と数値等角写像への応用，RIMS 研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」，京都大学数理解析研究所，京都，2011 年 10 月.

⑨ 緒方秀教，2 次元 Helmholtz 方程式に対する基本解近似解法の理論誤差評価と最適性，日本応用数理学会 2011 年度年会，同志社大学今出川キャンパス，京都，2011 年 9 月.

⑩ 緒方秀教，2 次元円板外部領域における Helmholtz 方程式 Neumann 境界値問題に対する基本解近似解法の理論誤差評価，日本応用数理学会 2010 年度年会，明治大学，東京，2010 年 9 月.

⑪ H.Ogata, F.Chiba and T.Ushijima, A theoretical study of the fundamental solution method for wave problems, The 2010 NIMS Conference & The Third China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, Gangneung Resortel, Gangneung, Korea, August 2010.

〔図書〕（計１件）

① 緒方秀教，変分法，コロナ社，2011 年 7 月，197.

６．研究組織

(1)研究代表者

緒方　秀教（OGATA HIDENORI）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号：５０２４２０３７