様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　6 月　1 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540124
研究課題名（和文）　無限集合の組合せ論と強制法理論による公理的集合論の他分野への応用

研究課題名（英文）　Applications of Infinite combinatorics and forcing theory

研究代表者
依岡　輝幸（YORIOKA TERUYUKI）
静岡大学・理学部・数学科
研究者番号：60432192

研究成果の概要（和文）：コーエンは，強制法という，集合論の公理系 ZFC からある数学的命題が証明できないことを示す手法を発明した．それ以降，強制法は多大な発展を遂げ，その結果，様々な数学的命題が ZFC と独立であることを示してきた．この研究の目的は，無限集合上の組合せ論と強制法理論の研究を通して，集合論以外の数学の分野に関連する命題の独立性に関して調べることである．

研究成果の概要（英文）：Cohen discovered the method of forcing, which enables us to show that some mathematical statements cannot proved from axiomatic set theory ZFC. After the Cohen's discovery, the forcing theory has been developing so deeply, and so it has been shown that several mathematical statements are independent from ZFC. The aim of this research is the investigation of independence of mathematical statements which includes ones outside of ZFC by developing infinite combinatorics and forcing theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学，数学一般(含確率論・統計数学)
キーワード：公理的集合論，強制法

１．研究開始当初の背景

(1) Stevo Todorčević は，Martin's Axiom $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ のラムゼイ理論的特徴付け，さらにその特徴付けを弱めた公理群 $\mathcal{K}_n$ を与え，様々な $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の応用例をそれらの公理群から導くことができることを示した．公理群の implications をダイアグラムで表すと以下のようになる．

$$\mathsf{MA}_{\aleph_1} \to \cdots \to \mathcal{K}_{n+1} \to \mathcal{K}_n \to \cdots \to \mathcal{K}_2$$

上記のダイアグラムで，他の矢印が引けるかどうかはまだ分かっていない．例えば，「$\mathcal{K}_2$ が成り立ち，$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立たないことが無矛盾であるか」という，上記の問題で最も弱い無矛盾結果が成り立つかどうかも分かっていない．

すべての部分空間が Lindelöf である空間を hereditarily Lindeöf (HL) と呼び，すべての部分空間が separable である空間を hereditarily separable (HS) と呼ぶ（そして，この文脈では，正則な位相空間だけを考えることとする）．この 2 つの性質は点と開集合の関係を入れ替えることによって互いに移り合うような定義に思える（ただし完全に入れ替わるわけではない）．そこで「HS と HL は同値であるか」という問題が長い間研究されてきたが, 1980 年代に, Todorčević は，PID という公理を導入し，「PID かつ $\mathfrak{p} > \aleph_1$ が成立すれば，“HS→HL” である」ことを証明した（そして 2006 年に Justin Tatch Moore が「separable でない HL 空間が存在する」ことを証明した）．そこで，「PID かつ “HS→HL” が成立すれば，$\mathfrak{p} > \aleph_1$ であるか」（つまり，「PID のもとで，$\mathfrak{p} > \aleph_1$ であることと “HS→HL” であることは同値か」）という問題が出されたが，これも未解決である．

(2) Dowker は，2 つの normal な位相空間の積が normal になるか，という一般位相幾何学における基本的な問題についての研究で，「normal な Hausdorff 空間 X が countably paracompact であることと，$X \times [0,1]$（$[0,1]$ は closed unit interval）が normal であることが同値である」ことを証明し，「normal な Hausdorff 空間は，countably paracompact か？」という問題を提唱した．Rudin は，Suslin's Hypothesis が成り立たない，つまり Suslin line が存在すれば，Dowker の問題の反例，つまり normal かつ countably paracompact でない Hausdorff 空間が存在することを証明し，この問題に初めて答えた．normal かつ countably paracompact でない Hausdorff 空間のことを, Dowker 空間という．Rudin の最初の結果は Suslin's Hypothesis を用いており，「Dowker 空間が存在しない」ことが ZFC から証明できないことが示されたのだが，その後，Rudin は，ZFC から「Dowker 空間が存在する」ことが証明されることを示した．この証明で構成された Dowker 空間は，サイズ（濃度）が非常に大きい空間であったのに対して，Suslin line を用いて Rudin が最初に構成した Dowker 空間のサイズは $\aleph_1$ であった．そこで Rudin は，「サイズ $\aleph_1$ の Dowker 空間が存在する」ことが ZFC から証明できるか，という問題を提唱した．これが 30 年以上未解決になっている small Dowker Space Problem である．

Zoltan T. Balogh は，サイズが連続体濃度である Dowker 空間を構成した．ひとつ特徴的なのは，Balogh の構成した空間が Dowker であることを証明するのに初等部分構造の理論という数理論理学の手法が用いられていることである．

(3) 半順序集合 $\langle L, \leq \rangle$ が Suslin lower semilattice であるとは，サイズが $\aleph_1$ で，整礎的（well-founded）で，どの二元も最大下界を持ち（lower semilattice），なおかつ不可算な鎖（chain, どの二元も大小関係を持つ）・反鎖（antichain, pie, どの二元も大小関係を持たない, 強制法の反鎖とは別の概念）を持たないもののことを言う．この，良く考えると奇妙な構造物は，Banach 空間の spreading models の研究から Odell により考案された．

最も単純な Suslin lower semilattice の例は Suslin tree である．よって「Suslin lower semilattice が存在する」という主張は無矛盾である．また，Todorcevic の結果から，「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ もしくは OCA が成り立てば, Suslin lower semilattice が存在しない」ことが証明される．

整礎的な lower semilattice の各元と，その先行者（predecessors）全体を対応させることにより，整礎的な lower semilattice $\langle L, \leq \rangle$ は，ある集合 $L' \subseteq [\omega_1]^{\leq \aleph_0}$ に対する順序集合 $\langle L', \subseteq \rangle$ と同形になり，しかも $x, y \in L'$ に対する最大下界は $x \cap y$ となる（つまり，$\langle L, \leq, \wedge \rangle$ と $\langle L', \subseteq, \cap \rangle$ が同形になる．このことを，$\langle L', \subseteq, \cap \rangle$ が整礎的な lower semilattice であると呼ぶ）．さらに，Raghavan は「ある $L \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が存在して，$\langle L, \subseteq, \wedge \rangle$ が Suslin lower semilattice である（さらに，全ての Aronszajn tree が special である）」ことが無矛盾であることを証明している．「どんな $L \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ に対しても，$\langle L, \subseteq \rangle$ は Suslin tree でない」ことと比較すると，Suslin lower semilattice は，Suslin tree よりも存在しやすそうである．

(4) ある数学的命題を満たす強制拡大モデルを構成するために，その命題に応じた強制法を使う必要がある．強制法理論が誕生して以来，それを包括的に取り扱う，もしくはいくつかのテクニックに分類して大括りすることが求められてきた．ある意味ではほんの限られたところで成功したとも言える一方，各命題に応じた場当たり的な発想を必要とすることがより一層明白になってきたとも言える．

また，重要な数学的命題の多くは「どんな $\cdots$ に対しても，ある $\cdots$ が存在して」という種類の命題（これを Π_2-文と呼ぶ）である．例えば，連続体仮説の否定は「どんなサイズ $\aleph_1$ の実数の集合に対しても，それに属さない実数が存在する」という Π_2-文と同値である．ベールのカテゴリー定理（これも Π_2-文である）をより広い空間へ適用することを許す言明と同値になる “半

順序のクラス $\mathcal{P}$ に対する強制公理 (Forcing Axioms)" は Π_2-文である．スースリンの問題の肯定解を与えるために Donald Martin と Robert Solovay が導入した Martin's Axiom ($\mathsf{MA}_{\aleph_1}$) は，基本的かつ代表的な強制公理である．Π_2-文を満たす強制拡大モデルを構成するためには，強制法の反復をする必要が多々あり，反復強制法の理論は強制法理論の中でも特に重要な部分である．Solovay と Tennenbaum は，ccc 強制法の有限台反復法を開発し，「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が ZFC と無矛盾である」ことを証明した．Saharon Shelah は proper 強制法の可算台反復法を編み出し，構成できる強制拡大モデルの種類をぐっと増やした．しかし，有限台反復法は連続体濃度がいくらでも大きい強制拡大モデルを構成できるのに対し，可算台反復法は連続体濃度を $\aleph_2$ 以下にしてしまうという技術的な問題を持っている．例えば，"℧ の否定" は Π_2-文であり，これは強い強制公理から導かれ，さらに proper 強制法の可算台反復法により強制できる（そしてその強制拡大モデルでは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が成り立つ)．Justin Tatch Moore は「$2^{\aleph_0} > \aleph_2$ ならば ℧ が成り立つか」という問題を提示している．

David Asperó と Miguel Angel Mota は，連続体濃度が $\aleph_2$ より大きい強制拡大モデルを構成する新しい反復法を開発し，$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ を包含する新しい強制公理が無矛盾であることを示した．それにより，例えば『「$2^{\aleph_0} > \aleph_2$ が成り立ち，℧ が成り立たない」ことが無矛盾である』ことを証明し，Moore の問題に答えた．

２．研究の目的

(1) Todočević は，2001 年に「coherent Suslin tree S が存在して，S が Suslin tree であることを保存するすべての proper forcing に対しての強制公理が成り立つ」という公理 $\mathsf{PFA}(S)$ を導入した．Suslin tree は $\mathfrak{p} = \aleph_1$ を強制する（よって，$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の否定を強制する)．さらに，Todorčević は，$\mathsf{PFA}(S)$ のもとで S が PID を強制することを証明した．よって，もし $\mathsf{PFA}(S)$ のもとで S が $\mathcal{K}_2$ を強制すれば，上記 (1) のひとつ目の問題が否定的に解決され，もし $\mathsf{PFA}(S)$ のもとで S が "HS→HL" を強制すれば，上記ふたつ目の問題が否定的に解決される．

Todorčdvić は，『$\mathsf{PFA}(S)$ のもとで S は「コンパクト空間については "HS→HL" が成り立つ」ことを強制する』ことを証明している．この手法が，コンパクトでない空間についても通用するかを調べることが目的のひとつである．

$\mathsf{PFA}(S)$ は $\diamondsuit$ と PFA という相反するふたつの公理の部分を合わせたものという見方ができる．その見方に基づいて，$\mathsf{PFA}(S)$ のもとで S が強制する新しい数学的命題を見つけることがもうひとつの目的である．

(2) 初等部分構造は様々な Δ-system lemmas を示すのに最も有効な手段であるが，それは初等部分構造を使うことによって複雑な組合せ論的議論を見えなくしてしまう（隠してしまう）ためであると考えられる．Balogh の構成した空間が Dowker であることを示すためには初等部分構造の理論が使われているため，数理論理学を知らない者には証明を理解することができない．この研究の目的は，Balogh の証明の肝心な組合せ的議論を明らかにすることである．

(3) Suslin lower semilattice がいつ存在するかを調べることが大きな目的である．Suslin lower semilattice は ccc な構造であるので，$\diamondsuit$ のもとで存在すべき構造である（しかし，その構造の複雑さのため，実際に構成した者は今までいなかったようである)．しかも，「$L \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が存在して，$(L, \subseteq)$ が well-founded な Suslin lower semilattice である」という主張は Σ^2_2 で記述可能であるから，Steel の予想『$\diamondsuit$ の仮定のもとで，Σ^2_2 な φ に対して，もし $\varphi+\mathsf{CH}$ が forceable であれば，ϕ が成り立つ』が正しければ，（ある large cardinal の存在の仮定の元で）$\diamondsuit$ からの存在が帰結される．

さらに，Suslin lower semilattice は Suslin tree よりも存在しやすい構造であると考えられるので，Suslin tree とは異なり，CH のもとでも存在するかもしれない．また，CH から存在が導かれる不可算かつ ccc な構造は，Shelah による「不可算な chain も antichain も持たないブール代数」しか知られていないので，その新たな例となっていれば大きな発見のひとつになる．

(4) Asperó と Mota による新しい強制法を用いて，新しい無矛盾結果を導くことが目的である．この新しい強制法による先行研究は，Asperó と Mota による 3 つの論文があるが，いずれも $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ より強い強制公理を強制するものであり，$\diamondsuit$ から導かれるような，強制公理とは相反する数学的命題を強制することはまだ研究されていなかった．

３．研究の方法

積極的に，様々な研究者と研究打ち合わせを行い，成果発表を行った．その実行ために，研究費のほとんどは旅費に費やされた．

４．研究成果

(1) ① *Club-isomorphisms of Aronszajn trees*

in PFA(S)[S]（2011 年 4 月に投稿，現在もなお投稿中）にて，次を証明した．

Theorem. 1. (Moore–Hrušák–Džamonja) $\langle A, B, E\rangle = \aleph_0$ となる invariant に対して，$\diamondsuit(A, B, E)$ が成り立つ．
2. PFA(S) のもとで，S は「全ての Aronszajn trees が club-isomorphic である」ことを強制する．

② $\dot\tau$ を ω_1 上の right-separated HS な正則位相である S-name とし，S-name の列 $\left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle$ を，各 $\alpha\in\omega_1$ に対して

$$\Vdash_S \text{“}\alpha\in \dot U_\alpha \in \dot\tau \ \&\ \mathrm{cl}_{\dot\tau}(\dot U_\alpha)\cap[\alpha+1,\omega_1)=\emptyset\text{”}$$

が成り立つものとする．このとき，強制法 $\mathbb{P}(\dot\tau, \left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle)$ を，次を満たす p の集合とする．

- $\mathrm{dom}(p)$ は S, $\dot\tau$, $\left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle$ を元として持つ $H(\kappa)$ の可算初等的部分構造の有限鎖である．
- 各 $M\in\mathrm{dom}(p)$ に対して，$p(M) = \langle t^p_M, \alpha^p_M\rangle \in (S\setminus M)\times(\omega_1\setminus M)$ である．
- 各 $M\in\mathrm{dom}(p)$ と $\beta\in\omega_1\cap M$ に対して，t^p_M は $\beta\in\dot U_{\alpha^p_M}$ であるかどうかを決定する．
- 各 $M, M'\in\mathrm{dom}(p)$ に対して，もし $M\in M'$ であるならば，$t^p_M, \alpha^p_M\in M'$ である．
- 各 $M, M'\in\mathrm{dom}(p)$ に対して，もし $t^p_M <_S t^p_{M'}$ であるならば，

  $$t^p_{M'} \Vdash_S \text{“}\alpha^p_M \notin \dot U_{\alpha^p_{M'}}\text{”}$$

  が成り立つ．

$\mathbb{P}(\dot\tau, \left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle)$ の順序は関数の拡大で定義する．これは不可算な離散部分集合であるような S-name を付加する自然な強制法である．Todorčdvić は，$\dot\tau$ がコンパクトであるとき，$\mathbb{P}(\dot\tau, \left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle)$ が proper で S が Suslin であることを保存することを証明している．

A note on a forcing related to the S-space problem in the extension with a coherent Suslin tree（2012 年 2 月に投稿，現在もなお投稿中）では，$\dot\tau$ がある条件を満たせば，$\mathbb{P}(\dot\tau, \left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle)$ が proper で S が Suslin であることを保存することを証明している．そこから，特に，$\dot\tau$ が ground model に基底を持つような位相を表す S-name であるときは，$\mathbb{P}(\dot\tau, \left\langle \dot U_\alpha; \alpha\in\omega_1\right\rangle)$ が proper で S が Suslin であることを保存することが分かる．Rudin と Todorčević は独立に，Suslin tree が存在すれば HL でない HS 空間が存在することを示しているので，この結果は，PFA(S) のもとでは，S による強制拡大の中で，それらは “HS→HL” の反例にはなっていないことを示している．

③ *Some results in the extension with a coherent Suslin tree* では，PFA(S) のもとでの S による強制拡大の中での様々な（ほとんど全ての）実数の基数不変量の値を決定し，さらに次を証明した．

Theorem. PFA(S) のもとで，S は「ω_2-Aronszajn tree が存在しない」ことを強制する．

その他，(1) と関連する研究として *Some results in the extension with a coherent Suslin tree II* がある．

(2) *Elementary submodel arguments in Balogh's Dowker spaces* では，次の Δ-system タイプの補題を示した．

Lemma. κ を $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$ を満たす無限基数，$\{c(x) : x\in\kappa\times\omega\}$ を $2=\{0,1\}$ への有限関数からなる集合，H を可算集合とする．このとき，次を満たす $\delta\in\kappa$ と関数 φ が存在する．

(1) $\mathrm{dom}(\varphi)$ は $\delta\times\omega$ の可算部分集合である．
(2) 各 $x\in\mathrm{dom}(\varphi)$ に対して，$\varphi(x)\subseteq\mathrm{dom}(c(x))$ である．
(3) 各 $\beta\in\kappa\setminus\delta$ と $n\in\omega$ に対して，$x=\langle\alpha,n\rangle\in\mathrm{dom}(\varphi)$ が存在して，$\mathrm{dom}(c(x))\cap\mathrm{dom}(c(\langle\beta,n\rangle)) = \varphi(x)$ と $c(x)|\varphi(x) = c(\langle\beta,n\rangle)|\varphi(x)$ を満たす．
(4) 各 $x\in\mathrm{dom}(\varphi)$ に対して，

$$\mathrm{dom}(c(x))\cap\left(\bigcup\mathrm{ran}(\varphi)\cup H\right) = \varphi(x)$$

が成り立つ．
(5) 各 $x, x'\in\mathrm{dom}(\varphi)$（$x\neq x'$）に対して，

$$\mathrm{dom}(c(x))\cap\mathrm{dom}(c(x)) \subseteq \left(\bigcup\mathrm{ran}(\varphi)\cup H\right)$$

が成り立つ．

そして，この補題を使えば，Balogh の構成した空間が Dowker であることが証明できることを示した．この補題は Balogh の証明に必要な組合せ的議論を抜き出したものであると考えている．

(3) *Suslin lattices* の §5 で次の定理を証明した．

Theorem. $\diamondsuit$ が成り立てば, ある $L \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が存在して, $\langle L, \subseteq, \wedge \rangle$ が Suslin lower semilattice である.

証明は大まかに次のように行う.『$\diamondsuit$-列を持つ $H(\aleph_2)$ の elementary submodel M_α と $L_\alpha \in [\mathcal{P}(\omega)]^{\aleph_0}$ を,

- $\langle M_\xi, L_\xi; \xi \in \alpha \rangle \in M_\alpha$ かつ
- L_α は M_α 上のある半順序に関する generic

であるように選ぶ. このとき, $\bigcup_{\alpha \in \omega_1} L_\alpha$ が Suslin lower semilattice なっている.』上記の “$\diamondsuit$-列” を, “実数の ω_1-列” に置き換えることができるなら, CH から Suslin lower semilattice の存在が言えるのだが, それが正しいかはまだ分かっていない.

(4) *A comment on Asperó–Mota iteration* (2013 年 4 月に投稿) では, 次を証明した.

Theorem. 「$2^{\aleph_0} = \mathsf{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{p} > \aleph_2$ が成り立ち, $\mho$ と $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立たない」ことが無矛盾である.

これを示すために, $\mho$ の否定を強制し, $\mathsf{add}(\mathcal{N})$ と $\mathfrak{p}$ を大きくするための Asperó と Mota の強制法を再定義し, それが Suslin tree などの ccc 構造を壊さないという preservation theorem を示した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

① Dilip Raghavan and Teruyuki Yorioka, Suslin lattices, Order, 査読有, 掲載決定, DOI: 10.1007/s11083-013-9288-2.

② Tadatoshi Miyamoto and Teruyuki Yorioka, Some results in the extension with a coherent Suslin tree II, Forcing extensions and large cardinals (RIMS Set Theory Workshop 2012), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 査読無, 掲載決定.

③ Haruto Ohta and Teruyuki Yorioka, Elementary submodel arguments in Balogh's Dowker spaces, Topology Proc., 査読有, 40 (2012) pp. 289-296.

④ Dilip raghavan and Teruyuki Yorioka, Some results in the extension with a coherent Suslin tree, Aspects of Descriptive Set Theory (Kyoto 2011), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, No 1790 (2012), 査読無, 72–82.

〔学会発表〕(計 15 件)

① 依岡　輝幸, ススリン木による強制拡大で成り立つこと, 日本数学会 2013 年度年会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学.

② Teruyuki Yorioka, A comment on Aspero-Mota iteration, RIMS 研究集会 強制法による拡大と巨大基数, 2012 年 12 月 7 日, 数理解析研究所.

③ Teruyuki Yorioka, The omega properness, club guessing and PFA(S), RIMS 研究集会 強制法による拡大と巨大基数, 2012 年 12 月 4 日数理解析研究所.

④ Teruyuki Yorioka, Some results in the extension with a coherent Suslin tree, Winter School in Abstract Analysis section Set Theory and Topology, 2012 年 1 月 31 日, Hejnice, Czech Republic.

⑤ Teruyuki Yorioka, Killing some S-spaces by a coherent Suslin tree, Joint FWF-JSPS Seminar on Forcing in Set Theory, 2012 年 1 月 24 日, 神戸大学.

⑥ 依岡　輝幸, Elementary submodel arguments in Balogh's Dowker spaces, 一般及び幾何学的トポロジーとその応用 (RIMS 共同利用研究集会), 2011 年 10 月 18 日, 数理解析研究所.

⑦ 依岡　輝幸, Club-isomorphisms of Aronszajn trees in PFA(S)[S], 2011 年度日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 28 日, 信州大学.

⑧ 依岡　輝幸, Suslin lower semilattice が存在する条件について, 2010 年度日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学.

〔その他〕
ホームページ
`http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~styorio/`

6. 研究組織
(1) 研究代表者
依岡　輝幸 (YORIOKA TERUYUKI)

静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：60432192

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
ブレンドル　ヤーグ（BRENDLE JÖRG）
神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授
研究者番号：70301851

大田　春外（OHTA HARUTO）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：40126769